REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

ISSN 1981-6979

VOLUME 9, NÚMERO 2. MAIO / AGOSTO 2020

A COMUNICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM O USO DO TANGRAM

Gilmara Gomes Meira[1]

RESUMO:

Objetivando analisar a comunicação entre os alunos, acerca do conhecimento geométrico em atividades de resolução de problemas, apresentamos parte de uma pesquisa desenvolvida com alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública da Paraíba, cujas análises foram apoiadas na teoria do Modelo van Hiele. Essa pesquisa desenvolvida em conjunto com a proposta do Programa Observatório de Educação/CAPES, do qual fizemos parte, aconteceu em três etapas - com a turma trabalhando em Díades; com a turma trabalhando individualmente e; com as Díades selecionadas a partir do seu desenvolvimento nos testes van Hiele. Os resultados analisados a partir da comunicação oral e escrita dos alunos, particularmente as suas explicações, apontam a fragilidade que há no conhecimento de Geometria por parte dos alunos que concluem o Ensino Médio, refletindo em limitações ao resolver problemas.
Palavras-chave: Comunicação; Explicações dos alunos; Resolução de Problemas Geométricos; Modelo van Hiele.

ABSTRACT:

Aiming at analyzing the communication among students about geometric knowledge in problem solving activities, we present part of a research developed with students of the 3rd Year of High School in a public school in Paraíba, whose analyzes were supported by the theory of the van Hiele Model . This research, developed in conjunction with the proposal of the Education Observatory Program / CAPES, of which we participated, took place in three stages - with the group working in Díades; With the class working individually and; With the Dyads selected from their development in the van Hiele tests. The results analyzed from the oral and written communication of the students, particularly their explanations, point to the fragility of Geometry knowledge on the part of the students who complete the Secondary School, reflecting in limitations when solving problems.

Keywords: Communication; Explanations'pupils; Geometric Problems Solving; Van Hiele Model.

INTRODUÇÃO

Frente à situação em que se encontra a aprendizagem matemática no Ensino Básico, no Brasil, é de uma necessidade suprema a busca de métodos que, possivelmente, venham desenvolver mais o empenho dos alunos para resultados mais significativos. Para tal, precisamos atribuir um novo significado frente ao que é desenvolvido nas aulas de Matemática. Conforme Rabelo e Gomes (2012) o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) publicou alguns princípios muito importantes para a Matemática escolar do século XXI, nos quais a ênfase maior é em relação ao currículo, o qual deve ser efetivo e coerente, permitindo que as ideias matemáticas sejam interligadas umas às outras. Com isso, os alunos poderão adiantar seus estudos e poderão vir a dar respostas a situações diversas em seu dia-a-dia.

Os desafios que a educação brasileira enfrenta, atualmente, exigem dos pesquisadores e educadores a busca de metodologias que possam despertar o interesse do aluno no processo de aprendizagem. Para tanto, é importante que o ensino esteja interligado com as necessidades do aluno. Nesse sentido, é

1 gilmarameira@yahoo.com.br

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 9, N. 2, 2021

fundamental utilizar tarefas que possam contribuir para o desenvolvimento, criatividade e reflexão, levando em consideração o nível de compreensão do aluno.

Com essa concepção, apresentamos parte dos resultados de uma pesquisa de dissertação que enfatizou a comunicação em atividades de resolução de problemas geométricos, subsidiados pelo uso do Tangram, cujas análises foram apoiadas na teoria do Modelo van Hiele. Para tal, a questão de pesquisa que desenvolvemos foi a seguinte: *Baseado na teoria do Modelo van Hiele, como os alunos de uma Turma de 3º Ano do Ensino Médio se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos?* De modo geral, o objetivo foi analisar a comunicação entre os alunos, acerca do conhecimento geométrico em atividades de resolução de problemas, a partir da teoria do Modelo van Hiele. Esse estudo se desenvolveu no âmbito do Projeto intitulado *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade,* do Programa Observatório de Educação (OBEDUC), da CAPES[2], tratou-se de um estudo sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula, cujo objetivo foi analisar como os alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto, diferentes materiais manipuláveis e diferentes materiais tecnológicos. Nossa pesquisa, especificamente, evidencia a comunicação e a resolução de problemas subsidiados com o uso do Tangram para análise do conhecimento geométrico em sala de aula.

Iniciamos com a comunicação dos alunos nas aulas de Matemática, destacando este elementos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A Resolução de Problemas no contexto da aprendizagem matemática vem a seguir, salientando a importância desta atividade para criatividade e aprendizagem dos alunos. Geometria: contexto e relevância, foca na Geometria, com outras experiências que começaram a ser impulsionadas, inclusive baseado no Modelo van Hiele e com uso de materiais manipuláveis em sala de aula, no intuito de resgatar o ensino de Geometria. e sua possibilidades. Por fim, Metodologia, com os casos Ana e Cecília, seguida das conclusões.

A COMUNICAÇÃO DOS ALUNOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

De acordo com Fonseca (2009), a comunicação é um meio no qual há uma articulação, organização e consolidação do pensamento. Com base nisso, a autora esclarece que o compartilhar de ideias se dá de vários modos e pode ser oralmente ou por escrito, a partir de gestos, desenhos, objetos, e símbolos. Assim, numa aula de Matemática os alunos estão em constante comunicação, mesmo que essa não se dê de modo formal. Todas as experiências são válidas e, por essa razão, devem ser muito bem aproveitadas para, a partir dos processos de interação e ação, os alunos se adequarem a uma linguagem mais precisa do ponto de vista matemático. Para tanto, é muito importante que seja dada a oportunidade desta experiência ser desenvolvida desde os Anos Iniciais, já que é o início de tudo, onde a criança começa a abstrair e desenvolver seu poder cognitivo.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000) defende que a comunicação em sala de aula deve incluir vários aspectos, tais como: *partilhar o pensamento e as ideias, ouvir os outros, colocar questões, pedir esclarecimentos, explicar e justificar* (NCTM, 2000 *apud* FONSECA 2009, p. 3). De fato, esses fatores podem surgir por meio da interação social, comunicação e resolução de problemas na sala de aula de Matemática, levando os alunos a refletirem sobre seu desenvolvimento e argumentação, e o professor a avaliar de forma mais propícia por meio da observação direta, da comunicação, criatividade e diálogo dos alunos e entre os alunos.

---

2 Projeto do Edital.....coordenado pela Profª Drª Kátia Maria de Medeiros.

A apresentação de explicações por parte dos alunos, um tipo de comunicação que pode ser explorado na aula de Matemática, não é trivial na realidade escolar que temos. Na maioria das vezes, os alunos apenas "dizem", apresentam o procedimento ou mesmo tentam explicar a partir da prática cotidiana ou de objetos. De acordo com Bishop e Goffree (1986), é um erro associar o "explicar" com o "dizer", pois deve haver justificativas pertinentes na resolução de problemas, com as quais os alunos possam se comunicar expressando o conhecimento matemático a partir de suas estratégias.

As explicações dos alunos, de acordo com Levenson, Tsamir e Tirosh (2004), podem ser classificadas por *Matematicamente baseadas* ou *Praticamente baseada*s. As explicações matematicamente baseadas expostas por alunos do Ensino Básico, embora nem sempre apresentem a formalidade e o rigor matemático, são baseadas em aspectos puros da Matemática, ou seja, argumentações baseadas em definições ou propriedades matemáticas aprendidas anteriormente. Já as explicações praticamente baseadas, como o próprio nome indica, remetem a explicações de cunho voltado para o contexto cotidiano, ou seja, são aquelas explicações informais e baseadas em recursos visuais ou manipuláveis.

De acordo com as autoras, as explicações praticamente baseadas, podem acontecer quando os alunos fazem referência ao cotidiano ou mesmo, materiais manipuláveis para dar significados às expressões matemáticas. No entanto, quando se fundamentam apenas em definições, propriedades e raciocínios matemáticos, a autora defende que suas explicações são matematicamente baseadas.

Com o objetivo de realizar um bom trabalho, onde a meta seja a aprendizagem, a comunicação entre o professor e os alunos é de grande valia. Esta comunicação, seja oral ou escrita, revela muito sobre cada um deles e, conforme Pessoa (2010, p. 28), "*a partir da comunicação o aluno explicita suas ideias matemáticas envolvidas nas experiências geométricas que são realizadas*". Isto pode ser primordial até no modo de avaliar, pois aquilo que o aluno expressa é o que ele pode abstrair durante o trabalho que desenvolveu.

No momento da exploração de uma tarefa em sala de aula é possível fazer muitos questionamentos, provocando o diálogo dos alunos envolvidos, a experimentação e a manipulação podem dar lugar para o envolvimento dos alunos e percepção de propriedades e conceitos diversos nas figuras geométricas.

Matos e Serrazina (1996 p. 171) argumentam que "*comunicação com sucesso exige a negociação de intenções e depende de todos os elementos da turma expressarem respeito e apoio pelas ideias dos outros*." Dessa forma, o modo como a tarefa é proposta em sala de aula, especificamente ao ser desenvolvida em duplas, deve acontecer de maneira organizada e orientada pelo professor para, assim, fazer da sala de aula um ambiente de real aprendizagem e investigações.

Segundo Bishop e Goffree (1986, p. 18), "*possivelmente, os professores de Matemática deveriam considerar mais deliberadamente o uso e a exploração de atividades em pequenos grupos*". Quando o assunto é a discussão em sala, os autores sublinham que a melhor forma para a ação, não são cadeiras separadas em filas e sim em uma forma na qual o professor e todos os alunos interajam conjuntamente. A comunicação entre todos os participantes, certamente é muito eficiente para esclarecimentos e uma partilha de significados matemáticos mais propícios. Sendo assim, a comunicação é um fator de relevância em sala de aula, no entanto, é preciso cuidado para que essa comunicação seja múltipla, isto é, por parte de todos os integrantes da turma (alunos e professor). Latas (2012) também defende a ideia de interação em sala de aula, uma vez que essa dinâmica pode possibilitar o desenvolvimento da comunicação e consequentemente mais autonomia e confiança por parte dos alunos.

> A interação, partilha de ideias e negociação de significados entre os alunos, inerentes às atividades geométricas em causa, podem constituir também um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática, podendo assim desenvolver nos alunos capacidades de autonomia e confiança (LATAS, 2012, p. 9).

Portanto, a comunicação entre os alunos e sua forma de linguagem no momento de desenvolvimento das tarefas ajuda a analisar mais positivamente sua interpretação e aprendizagem e consequentemente no processo de avaliação.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Ao tratar sobre a resolução de problemas, sabemos que embora seja de um valor supremo para o trabalho com conteúdos matemáticos e desenvolvimento intelectual, muitos são os desafios para inseri-los nas aulas de Matemática, em consequência de muitos fatores. Entre estes se encontra o baixo nível de conhecimento por grande parte dos alunos da escola pública brasileira, particularmente as da rede estadual e municipal. Na maior parte da vida escolar desses alunos a atividade mais frequente ou a única foi, e possivelmente continua sendo, a resolução de exercícios, o que é insuficiente mediante as cobranças sociais atuais.

Na resolução de problemas, é muito importante a compreensão de texto, isto é, saber interpretar e considerar possíveis estratégias para resolução, o que demanda um leque de conhecimentos prévios. Conforme salientam os Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008, p. 394), "*a predisposição para a resolução de problemas inclui confiança e vontade de empreender novas e difíceis tarefas*". Esse fator é justificado pela necessidade de inovação, tendo em vista que, na maior parte das vezes, o ritmo e metodologia em algumas aulas de Matemática têm causado acomodação e rejeição com relação ao estudo da disciplina.

Sabemos que a influência de Geoge Polya (1887 - 1985), foi fundamental para o desenvolvimento da resolução de problemas na sala de aula, pois sua proposta era de um ensino que criasse oportunidades para que os alunos refletissem, pensassem matematicamente e construíssem conhecimento.

Foi a partir dos anos de 1990 que a indicação da resolução de problemas começou a ganhar força nas aulas de Matemática, viabilizada pela proposta curricular que também envolvia outras propostas como a Modelagem e o trabalho com Investigações. Com isso, foi possível influenciar na criação de uma dinâmica inovadora nas aulas de Matemática. Na metodologia de resolução de problemas os alunos não se envolvem apenas em um processo de regras e procedimentos, mas são inseridos em um meio que provoca reflexão, desenvolvimento autônomo e interação, sendo, portanto, uma forma de os alunos apresentarem características do seu pensar matemático. De acordo com Van de Walle (2009), quando os alunos estão frente a uma situação de solucionar problemas, a ideia não é de aplicar Matemática, mas de aprender Matemática com base em seus métodos de resolução. E isso se dá quando os alunos deparam-se com tarefas bem escolhidas.

Como em qualquer atividade, na resolução de problemas, o planejamento é fundamental, pois no envolvimento da proposta os alunos podem fazer conjecturas que levem a novos problemas, por isso, é necessário que o docente esteja bem preparado. Com base nos Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008), para que aconteça a resolução de problemas com sucesso, é indispensável o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de auto regulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problema. Nesse sentido, os professores são muito exigidos, por serem os responsáveis em desenvolver meios que influenciem no desenvolvimento do conhecimento e estratégias matemáticas, assim podendo praticar uma variedade de heurísticas.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 9, N. 2, 2021

Na Resolução de Problemas, as regras do contrato didático3, sem dúvida, influenciam nas atitudes dos alunos, que querem resolver tudo de forma rápida através de um procedimento explícito, importando, muitas vezes, somente encontrar uma resposta. Segundo Medeiros (2001), os exercícios, considerados problemas fechados, são muito tradicionais nas aulas de Matemática sendo inserido no processo de ensino e aprendizagem de forma que limita a criatividade dos alunos, pelo modo como são apresentados, ou seja, apresentam um contexto muito limitado, palavras que dizem de imediato a operação a ser utilizada e quase sempre são propostos a partir de um conteúdo exposto. Schoenfeld (1996) considera como bons problemas aqueles que são relativamente acessíveis e que possam ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos. Assim, ele argumenta que os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas e de forma particular, os problemas abertos, é uma maneira de fazer matemática.

Um fator que merece atenção é o modo como o professor deve executar sua prática, pois o padrão rotineiro por si só, já não dá mais conta. Dessa forma, a reflexão sobre a prática pode permitir uma nova visão em relação à Matemática. De acordo com César, Oliveira e Teles (2004), o fato de o docente oferecer novas oportunidades aos alunos, bem como acreditar em seu potencial, pode resultar em avanços bem significativos.

> A conexão professores-alunos-conhecimento é, assim, reforçada por um novo contrato didático que valoriza a persistência na busca de novas soluções para a situação, bem como capacidade argumentativa e crítica dos estudantes e do raciocínio que eles usam. Assim, torna-se fundamental que o professor tenha uma melhor compreensão das potencialidades dos alunos, permitindo estas surgir através de tarefas com marcas sociais que promovam conflitos sócio-cognitivos mais rapidamente (CÉSAR, OLIVEIRA & TELES, 2004, p. 61).

Os alunos podem ser criativos, entretanto, necessita-se de um favorecimento de oportunidades para que essa criatividade seja despertada. D'Ambrósio (2008) nos diz que a modernidade em termos tecnológicos, favoreceu muito as oportunidades de aprendizagem, que vão muito além das que podem ser obtidas através do tradicional papel e lápis.

Portanto, a concepção de problemas é relativa em relação ao nível de escolaridade e de pensamento. De acordo com Dante (2010), o que é problema para alguns, pode não ser para outros e o mais importante é fazer o aluno pensar, desenvolver-se e adaptar-se a enfrentar situações novas, buscando sempre caminhos de interpretação e ação. As Orientações Curriculares Nacionais, por exemplo, argumentam que ao término do Ensino Médio se espera que alunos tenham conhecimento necessário para usar a Matemática a fim de compreender e resolver problemas diversos da área, além de problemas oriundos de outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2006). Defendemos em nosso trabalho que a resolução de problemas é uma alternativa viável e possível de ser desenvolvida, tanto individualmente, quanto em pequenos grupos, importando, sobretudo, que os alunos trabalhem de forma ativa.

Quando se propõe um problema, o aluno é desafiado a pensar e raciocinar matematicamente e a busca de soluções muitas vezes leva a outros problemas, o que proporciona a comunicação, a interação e a interligação de ideias viabilizadas pelo diálogo. Segundo Boavida et al (2008), a resolução de problemas incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários

3 Refere-se ao estudo das regras e condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar ou mesmo na dimensão mais ampla do sistema educativo (BROUSSEAU (1986) apud PAIS, 2011). Nas palavras de Brousseau (1980) citado por D'AMORE (2007) contrato didático pode ainda ser entendido como conjunto de hábitos do professor esperados pelos alunos e os comportamentos do aluno esperados pelo professor.

temas matemáticos e até interligados a outras áreas curriculares; e apresenta a Matemática com um sentido mais útil na vida quotidiana. Dessa forma, o aluno passa por um processo no qual é levado a organizar suas

ideias com base na situação proposta e no conhecimento prévio, seja este de natureza matemática ou prática.

GEOMETRIA: CONTEXTO E RELEVÂNCIA

A Geometria, entretanto, representa uma parte muito importante do conhecimento matemático e foi uma ciência construída culturalmente desde os primórdios da civilização humana, tendo conexões e aplicações estreitas com a nossa realidade. Notamos que quando ela é trabalhada, normalmente é utilizada como pré-requisito para assuntos posteriores vistos na escola, porém, a ênfase em trabalhá-la a partir da realidade dos estudantes é pouco explorada.

A decadência do ensino de Geometria no Brasil ainda é fruto do Movimento da Matemática Moderna (MMM) nas décadas de 1960 e 1970. Com esse movimento, os elementos geométricos passaram a ser inseridos na linguagem da teoria dos conjuntos. De acordo com Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), apenas ao término da década de 1970 começaram a surgir projetos baseados nas experiências dos alunos, nos quais estavam inseridos a exploração de figuras planas e espaciais com uma perspectiva mais dinâmica. Com isso, outras experiências começaram a ser impulsionadas, inclusive baseado no Modelo van Hiele e com uso de materiais manipuláveis em sala de aula, no intuito de resgatar o ensino de Geometria.

A forma como a Geometria vem sendo desenvolvida há muitos anos, tem gerado muitos impasses, por ser rotineiramente trabalhada de modo muito linear, convencional e, consequentemente, pouco significante. Mediante isso, os alunos apresentam sérias dificuldades de visualizar, reconhecer e demonstrar. Assim, ensino e aprendizagem têm acontecido de forma descompactada, estando os aprendizes, muitas vezes, a generalizar casos particulares. Conforme Dreyfus e Hadas (1994), os alunos devem ser levados a considerar diferentes casos para, posteriormente, decidir se a afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores asseguram que o sucesso do aluno frente ao que estuda permite reforçar a motivação para aprender de forma mais significativa. Segundo Leivas (2012), é necessário que a aprendizagem de Geometria esteja centrada em um processo que envolva visualização e manuseio de materiais manipuláveis.

Os programas de ensino, desde as séries iniciais até o fim do Ensino Médio, voltados para a Geometria, deveriam capacitar todos os alunos a analisar características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sugerem a inclusão de alternativas relativas a metodologias para o ensino de Geometria, mas não apontam muitas possibilidades para que isto ocorra. Então, na busca de opções, encontramos nas recreações geométricas, quando convenientemente planejadas, recursos pedagógicos enriquecedores e eficazes na construção do conhecimento. Três aspectos podem justificar seu uso em sala de aula: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais, que é de extrema importância para o desenvolvimento do aluno.

De acordo com Matos e Serrazina (1996), parece essencial que a Geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e orientação espacial crucial para o mundo moderno. No entanto, é de grande necessidade a existência de caminhos metodológicos que proporcione meios para que os próprios alunos possam desenvolver seu conhecimento.

Considerando a relevância que há no ensino e aprendizagem de Geometria Matos e Serrazina (1996) apontam que esse ensino e aprendizagem deve desenvolver nos alunos a utilização de múltiplas capacidades, tais como:

- Capacidade de visualização;
- Capacidade de verbalização;
- Organização lógica do pensamento matemático;
- Aplicar os conhecimentos geométricos noutras situações.

Portanto, as ideias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em outras áreas da Matemática e até mesmo em situações do mundo real. Assim, seu ensino deveria estar integrado, sempre que possível, com outras áreas, pois as representações geométricas podem ajudar os alunos a dar sentido à área, às frações, aos histogramas e aos dados colhidos.

As formas de representação apresentadas pelos alunos expressam parte do conhecimento que têm com relação à Geometria. Muitas das limitações apresentadas por eles ao término do Ensino Médio são reflexos de ineficácias no Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) apontam que no Ensino Fundamental os alunos devem dominar formas e figuras geométricas, representações gráficas e representações espaciais. Porém, essa não é uma realidade efetiva na maioria das escolas públicas do nosso país. Em nossa pesquisa, notamos essa carência, pois muitas das limitações originam-se da ineficácia dos conhecimentos prévios (conceitos básicos da Geometria).

Dina van Hiele Geldof e Pierre Marie van Hiele, preocupados com a frequência na qual os alunos se confundiam nas interpretações geométricas, como por exemplo, no reconhecimento de que um quadrado é um retângulo, criaram o Modelo conhecido mundialmente por *Modelo van Hiele.* Este Modelo além de orientar a formação também nos permite compreender as habilidades do aluno. Em Geometria, o Modelo é composto por cinco níveis de compreensão, os quais, segundo Crowley (1994) descrevem características do processo de pensamento.

De acordo com Nasser e Sant'anna (2010), a melhor forma de reconhecer em que Nível o aluno está raciocinando é através da observação direta do seu modo de agir e de suas estratégias ao resolver os problemas. Para tanto, recomendam atividades que levem os estudantes a pensar, desenvolver estratégias e mostrar suas respostas como melhor alternativa na identificação do Nível van Hiele, sob o qual eles estão raciocinando. As ideias preliminares desse Modelo estabelecem que os alunos avancem a partir de uma sequência de níveis de interpretações dos conceitos. Assim, os avanços de um Nível para outro deverão ocorrer por meio de um desenvolvimento planejado de atividades, uma vez que o progresso dos níveis de compreensão geométrica depende, mais especificamente, de uma aprendizagem adequada à experiência do aluno. Com isso, o professor deve estar atentamente observando tudo que eles falam e desenvolvem. O Modelo van Hiele, no entanto, é composto por cinco níveis intitulados *Reconhecimento; Análise; Abstração; Dedução e Rigor.*

Cada um desses Níveis tem suas especificidades e características próprias que leva o professor a compreender em qual deles o aluno está raciocinando. Conforme as autoras supracitadas o primeiro Nível (Reconhecimento) se caracteriza pelo reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras por sua aparência global. Já o segundo Nível (Análise) se caracteriza quando o aluno faz análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecem suas propriedades e faz uso delas na resolução de problemas. O terceiro Nível (Abstração) se caracteriza pela argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas. No quarto Nível (Dedução) já existe o domínio do processo dedutivo e das demonstrações. Por fim, o quinto Nível (Rigor) se caracteriza pela capacidade de compreender demonstrações formais.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 9, N. 2, 2021

De acordo com o que caracteriza cada Nível de pensamento geométrico, precisamos criar situações nas quais os alunos possam refletir e desenvolver suas estratégias através da visualização e do manuseio. Dessa forma, quando pensamos em recursos para as aulas de Matemática, existem muitas opções frente ao mundo tecnologicamente moderno em que vivemos. Veloso, Bastos e Figueirinhas (2009) apontam a real importância de proporcionar experiências com o uso de materiais manipuláveis, os quais, assim como qualquer outro recurso, precisam estar de acordo com o nível de escolaridade dos alunos. Contudo, o desenvolvimento do pensamento geométrico precisa ser trabalhado desde as Anos Iniciais para que o aluno possa evoluir de forma mais efetiva.

METODOLOGIA

Nessa pesquisa o principal foco não foram apenas os resultados, mas, principalmente, o desenvolvimento dos alunos no decorrer das atividades propostas, assim, ela se caracterizou de natureza qualitativa. Esse tipo de pesquisa assume diversas formas e é conduzida em múltiplos contextos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), as investigações qualitativas privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos de investigação. O público alvo foi uma turma de alunos do 3° Ano do Ensino Médio de uma escola pública da Paraíba que estudava no turno matutino e composta por 21 alunos, numa faixa etária que variava entre 16 e 19 anos de idade sendo a maior parte composta pelo público feminino.

Para organização de atividades, nos apoiamos em Nasser e Sant'anna (2010), com suas propostas de trabalho do Projeto Fundão da UFRJ, e na proposta de Oliveira e Gazire (2012), que apresentam módulos de atividades que têm como referência o trabalho de alguns dos mais importantes pesquisadores da teoria de van Hiele. A princípio conhecemos o perfil da turma, a partir de uma entrevista semiestruturada prestada pela professora regente, o que nos serviu de base para organizarmos as tarefas propostas. Nos primeiros contatos com a turma, trabalhamos com Díades aleatórias em sala, onde os próprios alunos escolhiam seus pares. Nessa etapa, conforme nossos objetivos, propomos tarefas com base na teoria de van Hiele (NASSER & SANT'ANNA, 2010; OLIVEIRA & GAZIRE, 2012) incrementada com o uso de alguns materiais manipuláveis (sólidos geométricos e figuras planas).

Com base na teoria de van Hiele a partir das atividades desenvolvidas nessa etapa, analisamos que todos os alunos apresentavam um Nível muito semelhante e, em virtude disto, organizamos outra etapa a ser desenvolvida com aqueles alunos, porém de forma individual, com objetivo de identificar o Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de cada um deles. Assim, em três encontros com a turma, aplicamos os Testes van Hiele, que é um conjunto de alternativas e questões propostas por Nasser e Sant'anna (2010) que permite a identificação do Nível de pensamento geométrico, mais especificamente, dos três primeiros níveis. Ao analisarmos o resultado dos testes, organizamos a última etapa da pesquisa com resolução de problemas subsidiados com o uso do Tangram, que aconteceram em quatro Episódios.

Sabemos da relevância da resolução de problemas, porém, para que ela aconteça positivamente, isto é, com compreensão, diversidade de estratégias para resolução e formalismo, é necessário ter o mínimo de conhecimento prévio e interpretação. Como a nossa proposta de pesquisa envolve, particularmente, a resolução de problemas, o uso de materiais manipuláveis e a comunicação entre os alunos, consideramos mais pertinente, baseado em nossos objetivos, analisar o desenvolvimento das alunas que apresentaram melhor desempenho nos testes, pois entendemos que a comunicação entre ambas, na formação de Díades, seria mais relevante para responder a questão diretriz: *Baseado na teoria do Modelo van Hiele, como os alunos se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos?*

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 9, N. 2, 2021

Nos problemas propostos, em cada Episódio, nosso objetivo foi analisar de que forma as Díades compreendiam conceitos básicos da Geometria, bem como as respectivas propriedades geométricas a partir de sua comunicação e estratégias apresentadas. Com essa proposta, analisamos a interação e, consequentemente, a forma como essas Díades se comunicavam na resolução dos problemas geométricos, de acordo com o Nível de pensamento geométrico que apresentavam, pois de acordo com Carvalho (2009), no momento em que se propõem atividades em sala de aula, proporcionando o trabalho colaborativo, desperta para argumentações, explicações, avaliação e refutação de ideias, enriquecendo assim, o poder matemático dos alunos. Dessa forma, a autonomia, a aproximação de níveis de conhecimento e a aproximação de diálogos são fatores pertinentes que podem ser de grande relevância para construção do conhecimento.

Assim, a comunicação oral e escrita das Díades, as observações e registros que fizemos, frente às interações e desenvolvimento, nos deram subsídio para analisar os dados e refletir sobre o estudo desenvolvido. No decorrer de toda a pesquisa fizemos uma análise global das tarefas desenvolvidas em sala de aula, tendo os alunos como participantes centrais, que foram observados em sua totalidade. Dessa forma, a comunicação oral e escrita, desempenho, interação e criatividade, foram fatores preponderantes na nossa análise que deu origem a três estudos de caso com as alunas identificadas pelos pseudônimos *Ana e Cecília, Vitória e Alice, Júlia e Amanda.* Trazemos neste artigo parte do caso Ana e Cecília.

EXTRATOS DO CASO ANA E CECÍLIA, NO EPISÓDIO "*CÁLCULO DE ÁREAS: OS CÁLCULOS DE PEDRINHO*"

Ana, Cecília, são alunas que têm 17 e 18 anos, de idade, respectivamente, e sempre estudaram em escolas públicas da Paraíba. Ambas afirmam gostar de Matemática, inclusive Ana e Alice disseram pretender ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, ao concluir o Ensino Médio. As alunas, em seu discurso, apresentam o gosto de se trabalhar Matemática de uma forma menos convencional. Ao trazermos os problemas para serem solucionados com o uso do Tangram, elas consideram interessante, porém disseram conhecer o material manipulável, mas nunca haver explorado em atividades. Mesmo com limitações no desenvolvimento dos problemas, elas se comunicam durante todo o trabalho, apresentando de fato, o que sabem do ponto de vista matemático.

No terceiro "*Cálculo de* áreas: os cálculos de Pedrinho" que compõe a pesquisa, o nosso objetivo foi identificar como as Díades desenvolviam seu raciocínio baseando-se na ideia de área de figuras planas e relações entre figuras. Assim, propomos o problema seguinte:

Se Pedrinho tomou como unidade de medida no cálculo das áreas das demais figuras, apenas o triângulo pequeno e o quadrado (peças juntas), como ele denotou a área do triângulo médio, do paralelogramo e do quadrado original (quadrado formato pelas sete peças do Tangram)?

Observamos no desenvolvimento das alunas Ana e Cecília, trabalhando em Díade, que houve uma considerável interação e comunicação. As alunas relacionaram áreas e conceitos específicos, o que as fez apresentar algumas *explicações praticamente baseadas*. Ana fez relações entre as áreas das figuras e Cecília explicou como encontrar a área do triângulo. As alunas, mesmo não apresentando nenhuma definição, propriedade ou conceito referente, reconheceram o paralelogramo e disseram que sua área era equivalente à área de dois triângulos menores. Ana e Cecília, ao mesmo tempo em que fizeram as relações entre as áreas das figuras, também apresentaram suas estratégias de resolução de forma escrita. Assim, sua comunicação na resolução do problema na apresentação e desenvolvimento das estratégias aconteceu de forma oral e escrita.

Para solucionar, elas começam separando as peças, e estavam com o Tangram industrializado, folhas de papel A4, e lápis.

Elas começaram buscando interpretar o problema, afirmando:

> **Ana:** *Nesse caso será usado apenas o triângulo pequeno e o quadrado!*
>
> **Cecília**: *Precisamos saber a área do triângulo médio, do paralelogramo e também do quadrado grande.*
>
> **Ana:** *Aqui a gente ver que os dois triângulos pequenos formam o paralelogramo. Eh, então a área do paralelogramo vai ser duas vezes a área do triângulo, né assim?!*

Observamos que, antes de solucionar, as alunas utilizaram uma estratégia que advém da proposta de Polya (1995), quando especifica que para resolver um problema é necessário fazer a interpretação e depois elaborar um plano para, posteriormente, executá-lo e validá-lo. Nesse sentido, as alunas passaram a usar o conhecimento que tinham sobre áreas, buscando pôr em prática na solução do problema proposto. Dessa forma, elas buscaram resolver a situação, a partir das fórmulas para o cálculo de área das figuras especificadas (quadrado e triângulo). Para isso, elas fizeram *explicações praticamente baseadas*, uma vez se voltam para o material manipulável especificado.

Ao mesmo tempo em que elas se comunicavam explicando o desenvolvimento, iam escrevendo o procedimento utilizado.

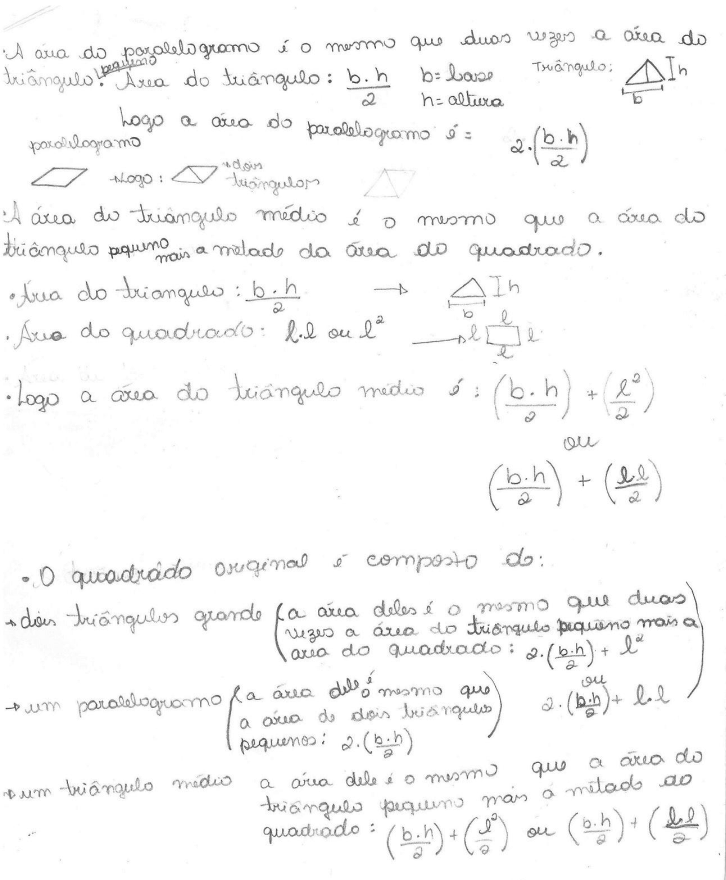
> **Cecília:** *Base vezes altura dividido por dois.*
>
> **Ana:** *Eh, então a gente tem que colocar assim: duas vezes a base vezes a altura e dividido por dois (escrevendo 2 . (b . h)/2). Certo?*
>
> **Cecília:** *Eh! Do mesmo jeito a área do triângulo médio que se a gente olhar, é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade da área do quadrado. Então assim, como a gente já sabe que a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois e a área do quadrado é lado vezes lado ou L^2. Logo, a área do triângulo médio vai ser base vezes altura dividido por dois mais L^2 dividido por dois. Tu entendeu?*
>
> **Ana:** *Entendi, vou escrever assim: (b . h) dividido por dois mais L^2 dividido por dois [(b . h)/2] + [L^2/2] .*

A partir das áreas específicas, Cecília fez o cálculo da área total do quadrado formado pelas sete peças do Tangram, compreendendo que é a junção de todas as áreas dos polígonos que o compõe. A maior dificuldade apresentada pela Díade consistiu em organizar os cálculos.

> **Cecília:** *Já o quadrado original é composto por dois triângulos grandes que, como podemos ver, a área dele é a mesma coisa que duas vezes a área do triângulo pequeno mais a área do quadrado que são as peças que forma. Também do paralelogramo, que a área é a mesma de dois triângulos pequenos. Do triângulo médio com a área igual do triângulo pequeno mais a metade da do quadrado. Vai anotando aí! Também do quadrado com área igual a L² e dos dois triângulos pequenos. Agora vamos organizar...*
>
> **Ana:** *Então, dizemos que o quadrado é formado por essas áreas juntas!*
>
> **Cecília:** *Tá! Então podemos anotar que a área do quadrado original é a soma da área dos dois triângulos grandes com a do triângulo médio, do quadrado e também dos dois triângulos pequenos e do paralelogramo.*

Ana e Cecília discutiram, interagiram e questionaram, porém chegaram ao mesmo consenso, tentando compreender as áreas de cada um dos polígonos, usando apenas o quadrado e o triângulo menor como referência para o cálculo dos demais. Elas apresentaram as fórmulas específicas para o cálculo dessas áreas e as relacionaram para encontrar soluções, apresentando esse desenvolvimento também de forma escrita, conforme apresentado na figura 01, abaixo. Identificamos que as alunas, neste Episódio, usaram explicações praticamente baseadas, quando relacionam as peças do Tangram e comparam as respectivas áreas, mas também apresentaram explicações matematicamente baseadas, quando usaram raciocínio matemático para o cálculo das áreas específicas. Conforme Levenson, Tsamir e Tirosh (2004), embora nem sempre tenham apresentado a formalidade e o rigor matemático, as explicações matematicamente baseadas foram baseadas em aspectos puros da Matemática, conforme identificamos nesse Episódio.

Figura 01 – comunicação escrita apresentada por Ana e Cecília no Episódio *"Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho"*



· A área do paralelogramo é o mesmo que duas vezes a área do triângulo pequeno. Área do triângulo: $\frac{b \cdot h}{2}$ b= base h= altura Triângulo:

Logo a área do paralelogramo é = $2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$

paralelogramo → logo: + dois triângulos

· A área do triângulo médio é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade da área do quadrado.

· Área do triângulo: $\frac{b \cdot h}{2}$ →

· Área do quadrado: $l.l$ ou l^2 →

· Logo a área do triângulo médio é: $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{l^2}{2}\right)$ ou $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{l.l}{2}\right)$

· O quadrado original é composto do:

→ dois triângulos grande (a área deles é o mesmo que duas vezes a área do triângulo pequeno mais a área do quadrado: $2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + l^2$ ou $2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + l.l$)

→ um paralelogramo (a área dele é o mesmo que a área de dois triângulos pequenos: $2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$)

→ um triângulo médio a área dele é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade do quadrado: $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{l^2}{2}\right)$ ou $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{l.l}{2}\right)$

Fonte: nota das alunas.

EXTRATOS DO CASO ANA E CECÍLIA, NO EPISÓDIO "*DESVENDANDO AS CURIOSIDADES DE CATARINA*"

No Episódio que chamamos de Episódio 2: *"Desvendando as curiosidades de Catarina"*, a proposta se deu com objetivo de compreender como as alunas faziam representações geométricas de polígonos usando apenas três peças do Tangram e com isso, como elas apresentam suas justificativas por meio da comunicação oral e escrita. O problema proposto foi o seguinte:

> *Depois que a professora de Matemática apresentou o Tangram para a turma, contextualizando sua história e alguns conceitos específicos deste quebra-cabeça, Catarina, por curiosidade, quis construir, usando apenas o quadrado e dois triângulos pequenos, alguns polígonos usuais. Quais são as possibilidades de construção de Catarina? Como é possível essas construções?*

No desenvolvimento do problema, Ana e Cecília começaram separando as peças. A principal estratégia utilizada pelas alunas foi representações por meio de tentativas de formação de figuras. Elas se comunicavam, muitas vezes, sobre as respectivas possibilidades, ao mesmo tempo fazendo essas representações a partir de desenhos na folha de resposta.

Ana: *Temos que usar apenas um quadrado e dois triângulos pequenos.*

Cecília: *Vamos ver!*

Ana: *Podemos montar as figuras!*

Ana: *Com os dois triângulos e o quadrado, podemos formar o trapézio, assim! (montando a figura na folha de resolução).*

Cecília: *Ah, sim! Também podemos construir um retângulo (montando a figura na folha de resolução).*

Ana: *O que mais?*

Cecília: *Acho que tem mais possibilidades, vamos ver? (manipulando as peças na busca de formar figuras).*

Ana: *Aqui ó. Um triângulo também*.

Cecília: *Verdade!*

Ana: *Então vamos colocar: as possibilidades são trapézio, retângulo e triângulo.*

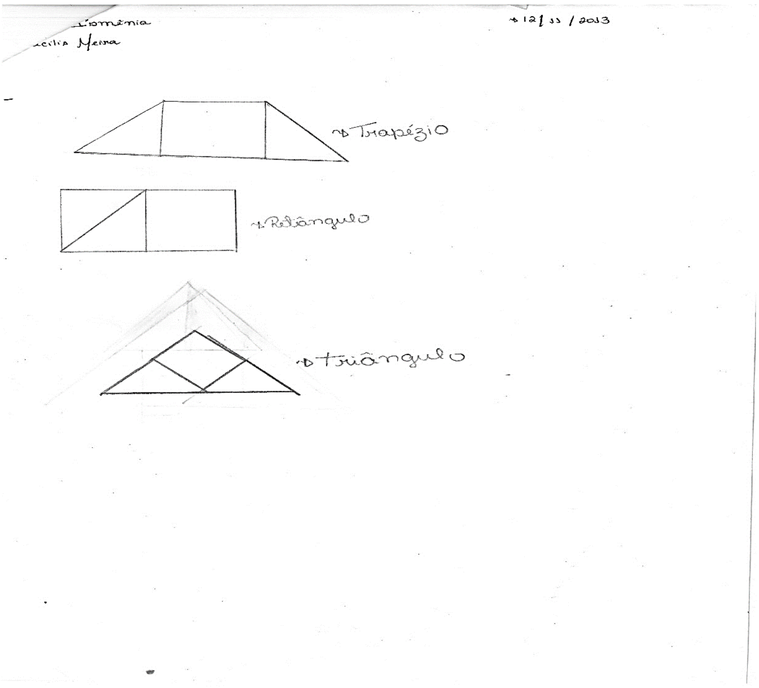
Cecília: *E pra segunda pergunta, já desenhamos, né?*

Ana: *Isso! Terminamos!*

A partir desse diálogo, as alunas fizeram os desenhos na folha de resposta, que representavam as figuras formadas com as peças do Tangram, conforme a figura 02.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 9, N. 2, 2021

Figura 02 - Representação por meio de desenhos apresentada por Ana e Cecília.



Fonte: nota das alunas.

Nesta atividade Ana e Cecília aparentaram reconhecer o conceito de polígono, entretanto, esse reconhecimento era limitado ao aspecto visual. Suas tentativas e constantes representações eram de triângulo, retângulo e trapézio. Em nenhum momento, elas mencionaram alguma de suas propriedades, e se convenceram da resposta ao problema apenas por meio do desenho e formação de algumas figuras de polígonos regulares.

A partir das comunicações orais descritas, as alunas na tentativa de responder à pergunta apontam como possibilidades o trapézio, triângulo e retângulo, porém não apresentaram como possibilidade o paralelogramo. Para o trapézio, Ana conseguiu fazer uma explicação praticamente baseada. Contudo, para as outras possibilidades apresentadas elas apenas mencionaram, ou seja, disseram sem explicar o procedimento matemático.

Identificamos que, quando se deparam com resolução de problemas, as dificuldades são maiores em relação à proposta de testes, uma vez que, para resolver problemas, além de ter uma boa base de conhecimentos prévios, é também necessário fazer uma interpretação mais detalhada e buscar estratégias de resolução. Portanto, para que haja um ensino que acompanhe as mudanças sociais, pois já não faz tanto sentido o aluno estar limitado em atividades rotineiras e repetitivas, o que mais importa, é a capacidade de resolver problemas.

CONCLUSÃO

Com base no desenvolvimento dos alunos, identificamos a partir do desenvolvimento da primeira etapa da pesquisa que toda a turma apresentou muitas limitações no desenvolvimento das atividades e, consequentemente, apresentou um Nível de pensamento geométrico muito aquém do esperado para alunos que concluem o Ensino Médio. Sabemos que é comum em todo âmbito escolar alguns apresentaram mais facilidade em comunicar-se em relação a outros, no entanto, notamos que todos apresentaram muitas fragilidades em relação ao conhecimento das propriedades de figuras geométricas. O reconhecimento ou compreensão da nomenclatura ou classificação das figuras geométricas só aconteceu a partir da aparência global dessas figuras, o que nos fez compreender, baseado em Nasser e Sant'anna (2010) e Crowley (1994), que não conseguiram ir além do primeiro Nível de compreensão geométrica (Reconhecimento ou Visualização), de acordo com o Modelo van Hiele.

Portanto, imersos em uma realidade que se moderniza a passos largos, se faz necessária uma reflexão sobre a prática e uma possível renovação da mesma, na tentativa de suprir algumas necessidades. Dessa forma, nos alunos é preciso despertar uma nova visão em relação ao papel da Matemática e de suas especificidades, proporcionando a reflexão sobre seu desenvolvimento em sala de aula. Esse fato é, sobretudo, importante para os exames de avaliação que acontecem a cada ano e que requerem uma boa base de interpretação matemática para solucioná-los, a exemplo do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática em Escola Pública), OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), Prova Brasil, entre outros. Contudo, é evidente a necessidade do posicionamento crítico e reflexivo mediante o desenvolvimento na resolução de problemas.

É uma alternativa interessante que o professor, em seu planejamento, possa pensar em caminhos nos quais sejam dadas maiores oportunidades para a comunicação fluir em sala de aula, pois na maior parte das vezes essa atitude cabe quase que de forma específica ao professor, enquanto o alunado é basicamente passivo. Um meio que possivelmente ameniza essa situação é o desenvolvimento de novas metodologias, nas quais os alunos participem ativamente das atividades, podendo assim expressar seu pensamento por meio da comunicação.

Sabemos, com base em Nasser e Sant'anna (2010), que se faz necessária a cobrança de justificativas desde os Anos Iniciais, para que, possivelmente, os alunos possam raciocinar e apontar um posicionamento mais crítico diante das questões postas. Além disso, vimos que o uso de materiais manipuláveis pode ser relevante na resolução dos problemas, pois estimula o desenvolvimento de estratégias, uma vez que o processo de visualização e manuseio é consideravelmente útil na compreensão geométrica, de acordo com Leivas (2012). Dessa forma, devemos instigar os alunos na descoberta de conceitos no decorrer das aulas de Matemática, na tentativa de torná-los mais reflexivos, dentro de um padrão menos descritivo e muito mais construtivo e interpretativo.

Portanto, é importante colocar os alunos em situações desafiadoras nas aulas de Matemática, desde os Anos Iniciais, com o intuito de proporcionar uma formação mais contundente, aluno mais crítico e criterioso a fim de ganharem maturidade para, ao término do Ensino Médio, chegar, pelo menos, no terceiro Nível do Modelo van Hiele (Dedução Informal ou Abstração), pois muitos dos alunos ainda estão raciocinando no primeiro Nível (Visualização ou Reconhecimento), o que é muito preocupante, uma vez que se encontram numa situação muito aquém das necessidades cobradas pelo Ano de escolaridade, sobretudo aqueles que estão concluindo o Ensino Médio e vislumbrando o alcance do Ensino Superior, como duas das integrantes das Díades desta pesquisa.

Entendemos que o cruzamento de ideias e pontos de vista no trabalho desenvolvido em Díades ou pequenos grupos leva os alunos a refletirem sobre seus argumentos e interpretações relacionados ao contexto em questão, podendo, assim, ampliar os conhecimentos, desenvolvendo novas estratégias e maiores significados, pois ambos estão, a partir do diálogo, ativamente envolvidos na tarefa. Por esta razão, torna-se muito relevante que nós, professores, possamos incentivar os alunos no desenvolvimento adequado das tarefas, fazendo-os entender quão interessante pode ser a Matemática a fim de terminarem com um sentimento de satisfação.

Portanto, temos nossos deveres enquanto educadores, e entre tais está a responsabilidade de seguirmos em busca de meios que possam favorecer o andamento das aulas, possibilitando a diminuição das dificuldades apresentadas pelos alunos em diversos conteúdos da Matemática.

É natural que nem todos tenham graus de abstração similar, uma vez que cada um aprende no seu próprio ritmo, podendo se identificar ou não com os conteúdos ou tarefas propostas, o que depende muito da forma como é abordada cada situação em sala de aula. Entretanto, é importante, sobretudo, o preparo perante o que deve ser proposto, pois estímulo e entusiasmo podem ser fatores valiosos para o rendimento em sala de aula.

Pensando no ensino de Matemática, particularmente de Geometria, percebemos que, apesar de tantos trabalhos desenvolvidos com essa temática, o problema permanece e grande parte dos alunos ainda apresentam muitas dificuldades de raciocínio e visualização, sobretudo, quando pensamos na resolução de problemas. Portanto, é muito importante que aos alunos, desde as séries iniciais, seja dada oportunidades de pensarem a partir da visualização e manipulação.

REFERÊNCIAS

BISHOP, A. J.; GOFFREE, F. *Perspectives on Mathematics Education (Cap. 8). Org.* B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte e publicado pela editora D. Reidel, em 1986.Tradução: José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte. [S.l.:s.n.].

BOAVIDA, A.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; PIMENTEL T. *Resolução de Problemas em Matemática*. In: A experiência matemática no ensino básico. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa: [s.n.], 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio*: Ciência da Natureza e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto, Portugal: Porto, 1994.

CARVALHO, C. *Comunicação e interações sociais nas aulas de Matemática*. In: LOPES, A.E.; NACARATO, A. M. Escritas e Leituras na Educação Matemática. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

CÉSAR, M.; OLIVEIRA, A.; TELES, L. *Sharing learning about geometry:* peer work in maths classes. In J. Giménez, G.E. FitzSimons, & C. Hahn (Eds.), *A challenge for mathematics education: toreconcilecommonlities and differences - CIEAEM54* (pp. 339-343). Barcelona: Graó, 2004.

CROWLEY, M. L. *O Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.* In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org) Ensinando e Aprendendo Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-19.

D' AMBRÓSIO, B. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, I., 2008, São Paulo. *Anais*... São Paulo: UNESP, 2008.

D'AMORE, B. *Elementos da didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L.R. *Formulação e resolução de problemas de matemática:* teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

DREYFUS, T.; HADAS, N. *Euclides deve permanecer – e até ser ensinado.* In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org) Ensinando e Aprendendo Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FONSECA, L. Comunicação Matemática na sala de aula - Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, nº 103, ESE/IP de Viana do Castelo. Portugal: [s.n.], 2009.

LATAS, J. Despertar o pensamento geométrico com a hierarquização de quadriláteros. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa, 2012. p. 7-11.

LEIVAS, J. C. P. Percepção e coordenação visual e motora no desenvolvimento do pensamento geométrico. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa, p. 27-32, 2012.

LEVENSON, E. TIROSH, D. TSAMIR, P. Elementary school teachers' preference for mathematically-based and practically-based explanations. In J. Novotna and H. Morava (Eds.), Proceedings of the 28 rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, v. 3, p. 241-248, Bergen, Norway: PME, 2004.

MATOS, J. M., & SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MEDEIROS, K.M. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*, nº 9/10, São Paulo, 2001.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.* 2 ed. Rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. *Ressignificando a Geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de van Hiele.* Belo Horizonte, 2012. Disponível em: http://www.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf?PHPSESSID=fdb6d12870c8aaf4688b74f0ad0dd734

Acessado em: 14 de maio de 2013.

PAIS, L. C. Didática da Matemática; uma análise da influência francesa. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PESSOA, Paula. *Novo Programa de Matemática – Inovações de práticas e aprendizagens. Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*, Ed. 109, 2010.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRINCÍPIOS E NORMAS PARA MATEMÁTICA ESCOLAR DO NCTM. Associação dos Professores de Matemática - APM. Tradução: Madga Melo. Lisboa, 2008.

RABELO, P. C.; GOMES, A. Reorganização Curricular da Geometria: Uma Experiência no 6° ano de escolaridade. *Quadrante Revista de Investigação em Educação Matemática*, v. XXI, n. 1, p. 3-27, 2012.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. *Laboratório de ensino de Geometria*. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

SCHOENFELD, A. *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

VAN de WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamenta:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VELOSO, E.; BASTOS, R.; FIGUEIRINHAS, S. Isometrias e Simetrias com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática*, ed. 101, 2009.