REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

ISSN 1981 8979
v.9, n.1, janeiro / abril 2020

A GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM PANORAMA SOBRE O SEU ENSINO NO BRASIL[1]

THE GEOMETRY IN BASIC EDUCATION: A OVERVIEW OF ITS TEACHING IN BRAZIL

André Pereira da Costa
andre.costa@ufob.edu.br
Universidade Federal do Oeste da Bahia

RESUMO

Neste artigo, apresentamos um breve panorama sobre a atual situação do ensino de Geometria no Brasil. Desse modo, consideramos tanto os aspectos de natureza institucional, como algumas questões de ordem epistemológica ligadas a esse processo. Em seguida, dissertamos sobre o conceito dos quadriláteros notáveis, mostrando como esse conceito foi construído ao longo da história, verificando se essa evolução conceitual tem alguma relação com as principais dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por estudantes do ensino básico. Por fim, apresentamos as situações que dão sentido aos quadriláteros e, para isso, nos baseamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986). Desse modo, foi possível identificarmos três tipos de situações: classificação, construção e inclusão.

Palavras-chave: Geometria; Ordem Epistemológica; Dificuldades Conceituais; Quadriláteros.

ABSTRAT

In this article, we present a brief overview of the current situation of Geometry teaching in Brazil. In this way, we consider both the aspects of an institutional nature, as well as some epistemological issues related to this process. Next, we discuss the concept of notable quadrilaterals, showing how this concept was constructed throughout history, verifying if this conceptual evolution has any relation with the main conceptual difficulties of learning presented by students of basic education. Finally, we present the situations that give meaning to the quadrilaterals and, for this, we base ourselves on the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud (1986). In this way, it was possible to identify three types of situations: classification, construction and inclusion.

Keywords: Geometry; Epistemological Order; Conceptual Difficulties; Quadrilaterals.

1 Trata-se de um recorte da tese de doutorado do autor.

Submetido: 11 de junho de 2019 / Aceito: 15 de fevereiro de 2020.

1 ASPECTOS DIDÁTICOS E EPISTEMOLÓGICOS RELACIONADOS AO ENSINO DE GEOMETRIA

Nas últimas décadas no Brasil, podemos verificar o grande avanço com as pesquisas em Educação Matemática. Com o ensino da Geometria isso não tem sido diferente. Tal desenvolvimento tem ocasionado conquistas importantes no contexto escolar, isto é, no chão da escola, onde, por um lado, os resultados desses estudos contribuem com a formação de professores e, consequentemente, com a aprendizagem dos alunos.

Por outro lado, mesmo com todo esse crescimento educacional, muitos dos achados dessas investigações não conseguem chegar até o estudante do ensino básico. Isso ocorre, pois os professores de Matemática, em sua maioria, enfrentam dificuldades em realizar a transposição entre os cenários vivenciados, com os quais foram construídas as pesquisas, e a realidade prática de sala de aula, onde realizam seu exercício profissional.

Conforme sinalizado por Câmara dos Santos (2001), os efeitos dessa situação produzem um *distanciamento progressivo* entre os resultados, bastante favoráveis dos estudos educacionais, e a prática difícil e específica da sala de aula em Matemática da escola básica.

> Tal distanciamento consiste na dificuldade de articulação entre os resultados obtidos nas pesquisas educacionais e a realidade em sala de aula, ocasionando um empilhamento de reflexões advindas de pesquisas sem que com isso seja direcionado ao ambiente escolar (LIMA BORBA; PEREIRA DA COSTA, 2018, p. 61).

Desse modo, esse distanciamento progressivo pode ser observado com muito relevo na escola básica brasileira, localizando-se vigorosamente na esfera da Matemática de maneira mais específica. No caso do ensino de Geometria, em especial, tal distanciamento é mais evidente.

Com efeito, a ausência de conexão entre a investigação em educação geométrica e a dinâmica complexa da sala de aula em Matemática, tem atraído o surgimento de algumas consequências que podem, inclusive, prejudicar a compreensão de conceitos em Geometria:

> pode-se observar que, se por um lado o desenvolvimento dos trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem em geometria contribuiu bastante para a atenuação de uma certa tendência formalista, predominante a partir do movimento da Matemática Moderna, por outro lado a incompreensão, ou dificuldades de reprodução em sala de aula desses resultados, fez crescer a tendência a uma manipulação inconsistente na aprendizagem de geometria, provocando, muitas vezes, efeitos nocivos à aprendizagem (CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.178, itálico nosso).

Nessa direção, essa polarização estabelecida entre o formalismo e a manipulação inconsistente, sinalizada pelo autor, tem feito com que a Geometria seja, em geral, pouco trabalhada nas aulas de

Matemática do ensino básico, ou então, explorada de modo equivocado.

Tal fato tem causado um amplo debate nacional entre vários educadores matemáticos (SILVA; SILVA, 2014; KALEFF, 2017; CORREIA; UTSUMI; NASSER, 2017; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; MORETTI; HILLESSHEIM, 2018; PEREIRA DA COSTA, 2019; entre outros) sobre a forma como conceitos geométricos são abordados tanto na educação básica, como nos cursos de formação de professores de Matemática.

Entre os aspectos que favorecem este quadro, Pereira da Costa (2016) destaca as dificuldades relacionadas à abordagem da Geometria nos cursos de licenciatura em Matemática e em Pedagogia, que formam professores de Matemática para atuarem na educação infantil, no ensino fundamental e no ensino médio.

Segundo esse pesquisador, os futuros professores do ensino básico que frequentam tais cursos, geralmente, têm pouco (ou nenhum) contato com a Geometria, ou então, vivenciam experiências formativas que exploram conceitos geométricos de forma bastante desarticulada com suas futuras práticas pedagógicas.

Diante dessa circunstância, fica devidamente compreendido o motivo desses docentes, quando exercerem sua profissão, em considerarem o ensino de Geometria inconcebível. Isto é, na maior parte dos casos, alegam que não é possível ensinar, com precisão e clareza, o que é desconhecido ou superficial para eles.

Podemos verificar, com certa facilidade, que nas escolas do ensino básico, o ensino de Geometria ainda está "contagiado" pela *omissão geométrica*. Tal fenômeno foi inicialmente discutido no Brasil por Lorenzato (1995) há mais de 20 anos, todavia, continua bastante ativo nas aulas de Matemática, atualmente.

Como ilustração disso, apresentamos alguns resultados de duas pesquisas (PEREIRA DA COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016c; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016), nas quais fizemos parte da autoria, realizadas com 34 estudantes de licenciatura em Matemática e 24 professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. Esses participantes foram submetidos a cinco questões sobre geometria euclidiana plana em ambos os estudos.

Se considerarmos a primeira questão do teste, podemos perceber que foram obtidas 40% de respostas erradas entre os estudantes de licenciatura. Ao analisarmos as respostas dos professores de Matemática, esse índice subiu para 46% do total de participantes. Esses resultados mostram, por exemplo, que esses partícipes têm dificuldades em reconhecer um quadrado como um tipo especial de retângulo.

Em uma pesquisa semelhante realizada com 10 professores de Matemática do ensino básico, Silva e Silva (2014) aplicaram um teste formado por dez itens, entre os quais, oito questões eram sobre geometria euclidiana e duas sobre geometria não euclidiana.

Os resultados encontrados no estudo mostraram que os professores não possuem confiança em ensinar algum conteúdo matemático de natureza geométrica. Eles sinalizam que a ausência da Geometria em suas práticas pedagógicas é devida à má formação que tiveram nos cursos de licenciatura em Matemática. Ainda, para esses participantes, o currículo universitário não apresenta uma adequada articulação entre os conceitos geométricos e a escola básica.

Essas evidências apontam que, apesar do notável progresso com as discussões sobre os aspectos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, na atualidade, é possível encontrarmos presentes em nossas escolas, sobretudo, nas aulas de Matemática, vários pontos sinalizados por Lorenzato (1995).

Com relação aos livros didáticos de Matemática, houve muitos avanços. Nessas obras, hoje, podemos verificar que conceitos geométricos são apresentados não mais nos últimos capítulos. Até mesmo, são explorados de forma articulada com outros objetos da Geometria e com outros campos da Matemática (tais como Grandezas e Medidas, Álgebra, Números e Operações, etc.).

Contudo, em geral, os professores optam por não abordar esses conceitos em sala de aula, ou então, acabam ensinando-os de forma superficial e desarticulada com a realidade dos seus alunos:

> então, a Geometria não encontra espaço no ensino da Matemática, ficando como um *apêndice curricular*, passando a ideia de que se trata de um conteúdo difícil ou sem importância para a aprendizagem dos alunos. Assim, parece que os estudantes têm contato somente com o que os livros abordam, deixando de construírem de forma adequada um novo saber (PEREIRA DA COSTA, 2016, p.31).

Além disso, estudos educacionais (PACHÊCO; PACHÊCO; SILVA, 2017; MONTEIRO; ROSA DOS SANTOS, 2018; SANTOS; ROSA DOS SANTOS, 2018; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d, entre outros) têm sinalizado alguns problemas acerca da abordagem geométrica nos atuais livros didáticos adotados no Brasil, sobretudo, com relação às tarefas apresentadas em exercícios.

Em uma pesquisa que teve por objetivo analisar a abordagem dos quadriláteros notáveis presente em um livro didático de Matemática do sexto ano do ensino fundamental, Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018b) perceberam uma forte tendência de explorar esse conceito a partir do cálculo da medida de grandezas geométricas.

Os autores analisaram 32 tarefas presentes no capítulo destinado aos quadriláteros, que foram categorizadas em seis tipos de tarefas:

T_M – Determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável

T_R – Reconhecer quadriláteros notáveis

T_P – Reconhecer propriedades dos quadriláteros notáveis

T_D – Associar elementos da definição ao quadrilátero notável correspondente

T_C – Construir quadriláteros

> T_I – Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes
>
> (PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018b, p.46)

Nessa pesquisa, entre os tipos de tarefas, o mais manifestado foi T_M – *Determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável*, com uma frequência relativa de 31,25% do total. Enquanto que os menos presentes no livro didático foram T_C – *Construir quadriláteros* (com 6,25%) e T_I – *Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes* (com 3,12%).

Resultados semelhantes foram obtidos em outro estudo realizado por Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018a), no qual, analisaram a abordagem dos quadriláteros notáveis em um livro do oitavo ano do ensino fundamental. Entre as 109 tarefas identificadas no capítulo do livro que explora esse conceito, T_M está presente em 38,53% do total, enquanto que T_C possui uma frequência relativa de 4,59% e T_I com 1,83%.

Em seguida, ao analisar a abordagem do conceito de ângulo presente em um livro didático de Matemática do oitavo ano do ensino fundamental, Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018c) verificaram que das 209 tarefas identificadas no capítulo destinado a esse saber, o tipo mais evidente foi *determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região*, presente em 143 itens, o que representa cerca de 68,4% do geral.

Por fim, ao analisar a organização matemática do ensino de triângulos existente em um livro didático do oitavo ano do ensino fundamental, Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018d) constaram que dos 150 itens analisados no capítulo do livro referente a esse tópico, *determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um triângulo* foi o tipo de tarefa mais manifestado, com uma frequência de 22,67%, o que corresponde a 34 itens do total.

Em todos esses estudos, percebemos que as tarefas relacionadas à construção, à inclusão de classe e à identificação são pouco exploradas. Por outro lado, há uma grande ênfase no cálculo da medida de grandezas geométricas associadas às figuras geométricas, sobretudo, a partir do uso de equações lineares.

Logo, parece que os campos da Álgebra e das Grandezas e Medidas são sempre privilegiados, em detrimento com o campo geométrico, que tem ocupado um segundo plano nos livros didáticos analisados. Em nosso entendimento, a tendência por essa abordagem ainda é um resquício da influência do Movimento da Matemática Moderna.

O Movimento da Matemática Moderna, que emergiu na segunda metade da década de 60, teve grande influência no recente cenário em que se insere o ensino de Geometria no Brasil. Tal movimento baseou-se no formalismo e no rigor do conhecimento matemático, tendo por fundamentação a Teoria dos Conjuntos e da Álgebra.

A "proposta curricular", de promover a algebrização da Geometria, não teve êxito no país, entrando em decadência no final dos anos 1970. Todavia, promoveu a ruptura com o modelo curricular anterior, caracterizado por demonstrações a partir de uma análise lógica e dedutiva:

> até há poucas décadas, o ensino da Geometria no Brasil era apenas racional, centrado em definições e demonstrações; esse modo formal dedutivo de conceber o ensino da Geometria elementar dificultava a aprendizagem dela para muitos. Com a invasão da Matemática Moderna, a Geometria quase desapareceu das salas de aula (LORENZATO, 2012, p.xiii).

Nessa direção, passados cerca de cinquenta anos do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, o lugar da Geometria nas escolas do ensino básico, especificamente, nas aulas de Matemática, ainda continua indefinido.

É importante destacar que a lei 5.692/71, isto é, a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus de 1971 também colaborou com a omissão geométrica. Por meio dessa lei, as escolas de todo o território nacional tornaram-se autônomas para organizar e selecionar os conteúdos, a serem abordados nas disciplinas que compunham os seus currículos (PEREIRA DA COSTA, 2016).

Assim, muitos professores que não se sentiam confortáveis com o ensino de Geometria, optavam por excluí-lo de suas práticas pedagógicas. Também, entre os que buscavam abordá-lo:

> muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p.7).

Como destacam Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), apesar do abandono geométrico em nossas escolas provocado pelo Movimento da Matemática Moderna, a Geometria atualmente é reconhecida como de grande relevância para a formação dos estudantes, tanto do ponto de vista didático, como também das questões históricas e científicas.

Todavia, apesar desse reconhecimento recente sobre o ensino de Geometria, parece não existir uma concordância entre os educadores matemáticos acerca dos conteúdos e conceitos geométricos a serem abordados na escola básica e nos cursos de formação de professores. Essa ausência de consenso abrange também sobre a forma como deve ocorrer essa abordagem e o seu tempo de duração em sala de aula (PEREIRA DA COSTA, 2016).

Pires, Cury e Campos (2000) enfatizam que a Geometria tornou-se importante para pesquisadores e professores, pois a partir do estudo adequado dos seus conceitos, o aluno avança em seu pensamento geométrico. Para as autoras, esse pensamento possibilita que a criança desenvolva compreensão, descrição e representação da realidade na qual está inserida. Essas habilidades são mobilizadas em um espaço rico para se explorar situações-problemas.

> É a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno que as primeiras noções relativas aos elementos geométricos podem ser trabalhadas, incorporando-

> se sua experiência pessoal com os elementos do espaço e sua familiarização com as formas bi e tridimensionais, e interligando-as aos conhecimentos numéricos, métricos e algébricos que serão construídos (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p.13).

Para os autores, a criança ao realizar a exploração sobre as formas e os objetos do espaço no qual está introduzida, ela mobiliza um sistema conceitual para desenvolver tal processo. Ao utilizar esse sistema, o estudante estará pensando geometricamente.

Além dos aspectos de natureza institucional, mencionados em momento anterior, que colaboram para a omissão geométrica nas aulas de Matemática, é possível verificarmos que há elementos de outro âmago que tornam mais intenso esse cenário.

Conforme apontado por Câmara dos Santos (1992), existem outros fatores, mas de ordem epistemológica. Sobretudo, no que se refere ao lugar que a Geometria ocupa dentro da própria Matemática, bem como seu vínculo relacional com o mundo real identificado pelo estudante em sua existência cotidiana.

Nessa direção, considerando essa perspectiva epistemológica em torno do ensino da Geometria, concordamos que:

> o ensino da geometria possui dificuldades específicas que a distinguem do ensino dos outros campos da Matemática, e que se devem, principalmente, ao lugar que ocupa na fronteira entre o sensível e o inteligível. Desse modo, a Geometria funcionaria, ora como um instrumento de compreensão da complexa realidade natural, ora como uma construção ideal cuja estética nos deixa mais perto das concepções platônicas[1] (CÂMARA DOS SANTOS, 1992, p.57, tradução nossa).

Para Bkouche (1988), a diferenciação entre o mundo sensível e o mundo inteligível é produzida por meio da Geometria, de maneira particular. Logo, essa distinção é própria do conhecimento geométrico, não sendo verificado em outras áreas da Matemática.

Tendo por base uma visão platônica, sustentada por um ponto de vista idealizado do conhecimento matemático, o pesquisador compreende o ser humano como um engenheiro que produz, mas que, sobretudo, demole o muro que separa essas duas realidades (o sensível e o inteligível). Tal fato ocorre para atender a demanda característica do homem relacionada à compreensão da realidade em que se insere. Nesse sentido, a complexidade referente às relações entre os objetos do mundo real, as informações oriundas dos atos de observar e de perceber e os objetos ideais, do mundo platônico, surgem de modo especial no campo geométrico (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

Conforme indica esse autor, com um papel prevalecente na evolução da história do conhecimento científico, a relação dialética entre a realidade sensível e realidade inteligível parece ser influenciado por uma polarização. Tal antagonismo deriva tanto por meio de um destaque da geometria do artesanato,

1 l'enseignement de la géométrie présente des difficultés particulières que le différencient de l'enseignement des autres branches des mathématiques et qui sont dues, principalement, à la place qu'elle occupe à la frontière entre le sensible et l'intelligible. La géométrie fonctionnerait, ainsi, tantôt comme instrument de la compréhension de la réalité naturel complexe, tantôt comme construction idéale dont esthétique nous approche des conceptions platoniques (CÂMARA DOS SANTOS, 1992, p.57).

como pela ênfase em um formalismo matemático, em uma perspectiva bourbarquiana.

A questão da fronteira entre o sensível e o inteligível se deve ao fato de os objetos geométricos serem criações mentais, abstratas, sendo que no mundo material aparecem inúmeras representações desses objetos. Por exemplo, um tijolo se assemelha a um paralelepípedo, mas não o é. O paralelepípedo é um objeto geométrico abstrato, ou seja, do mundo platônico. Todavia, em geral, a pouca preocupação da escola em diferenciar o objeto de sua representação gera, muitas vezes, a geometria do artesanato, em que se acredita que manipulando elementos do mundo real, o aluno irá construir o conceito matemático.

Para Câmara dos Santos (2009, p.180-181), a relação dialética surge rigorosamente conectada às questões da Geometria de natureza didática:

> de forma resumida, poderíamos colocar em evidência dois grandes posicionamentos do ensino da geometria, nos quais os objetos geométricos adquirem *status* essencialmente opostos. Assim, até a primeira metade do século XX, a concepção corrente da geometria é aquela de um instrumento de descrição do mundo real ou sensível. Os objetos geométricos são idealizados a partir de um substrato real. Os casos de congruência de triângulos, como proposto por Euclides nos seus *Elementos* são um exemplo bem característico, em que dois triângulos são congruentes se eles podem ser sobrepostos.

De acordo com o autor, com o Movimento da Matemática Moderna decorrente da década de 70, a Geometria passa a assumir uma nova função no sistema educacional brasileiro, sendo considerada como um modelo teórico em Matemática, possível de ser aplicado de modo eventual em cenários reais. Desse modo, os objetos em Geometria são entendidos como seres ideais, sujeitos a realizarem a descrição do mundo real. Os cenários didáticos encontram apoio no grafismo, o processo conceitual vai ser direcionado em torno da identificação das formas geométricas (CÂMARA DOS SANTOS, 1992).

Então, as figuras geométricas alteram seu status:

> se durante as aprendizagens iniciais no período anterior ao Movimento da Matemática Moderna, as figuras geométricas tinham, principalmente, o status de significado, elas vão, a partir daí, assumir a posição de significantes, isto é, representações de objetos ideais. O pensamento geométrico dos estudantes será orientado para esses objetos ideais. Essas evoluções, portanto, induzem uma mudança nas propriedades das figuras, na qual seu aspecto descritivo dará origem a um novo status, o da proposição e da manipulação de teoremas[2] (CÂMARA DOS SANTOS, 2001, p.3-4, tradução nossa).

Para tanto, os efeitos produzidos pelo Movimento da Matemática Moderna mostram, de modo

2 Si lors des premiers apprentissages dans la période pré mathématiques modernes les figures géométriques avaient surtout le statut de signifié, elles vont, à partir de là, prendre la position de signifiantes, c'est-à-dire, de représentations des objets idéaux. La pensée géométrique des élèves va être orientée vers ces objets idéaux. Ces évolutions induisent, par conséquent, un changement du point de vue des propriétés des figures, où leur aspect descriptif va donner lieu à un nouveau statut, celui de la proposition des théorèmes (CÂMARA DOS SANTOS, 2001, p.3-4).

bem claro, a forma como a Matemática é entendida e representada, sobretudo, acerca da representação sobre os objetos geométricos, que tanto alunos como professores produzem atualmente. Como ilustração disso, isto é, com relação às representações sobre a Geometria influenciadas pela Matemática Moderna, Maia (2009) fez um estudo comparativo, por meio do qual identificou significados diversos entre professores de Matemática do Brasil e da França acerca da aplicabilidade da Matemática, em particular, do campo geométrico.

Segundo indicado pela autora, para os professores franceses, a Geometria é considerada como um conteúdo favorável à inserção do processo de dedução, em uma ótica que busca desenvolver a aprendizagem da demonstração em Matemática. Além disso, essa ação demanda um alto grau de abstração, impreterivelmente.

Enquanto que os professores brasileiros compreendem que a Geometria é um tópico de ensino que se localiza entre a Matemática de natureza concreta e a Matemática de âmago abstrato. Logo, o ensino desse campo deve promover situações, nas quais os estudantes sejam capazes de atravessar a ponte entre esses dois mundos matemáticos (MAIA, 2009).

Em nosso entendimento, essas representações sobre o campo geométrico são influenciadas por um elemento de ordem epistemológica, isto é, esses significados atribuídos à Geometria são marcados pela dialética entre mundo sensível e mundo inteligível.

Conforme Maia (2009), o ensino de Geometria ocupa dois status no Brasil. No primeiro, se situa no cerne dos estudos educacionais, enquanto que no segundo, é considerado um conteúdo a ser abordado no ensino básico.

No que se refere à Geometria presente em sala de aula, quando ensinada, essa pesquisadora aponta a existência de duas tendências: "uma geometria teórica, independente de uma modelização do espaço ou uma passagem não problematizada entre a geometria da observação e a geometria da demonstração" (p.38).

Para Maia (2009), essas considerações têm feito com que o ensino de Geometria seja apreciado com base em uma perspectiva platônica. Nessa compreensão, há um destaque na distinção entre os sentidos em Geometria atribuídos aos termos desenho e figura.

Desse modo, concordamos com a autora ao considerar que, sob um olhar platônico, a figura é um objeto ideal em Geometria, enquanto que o desenho é uma representação inacabada presente no concreto.

> A figura é, assim, o objeto abstrato que serve de substrato para o raciocínio, para o pensamento. Enquanto tal pode ser identificada ao objeto da teoria. O desenho, por sua vez, é a materialização sobre uma folha de papel, uma tela do computador, etc. O desenho é um modelo da figura. A figura permite a determinação de propriedades, estabelecendo instrumentos de generalização, o desenho se refere ao objeto concreto que *figura* na folha de papel. Importante ressaltar que a passagem do desenho à figura pode ajudar a situar a geometria na fronteira do sensível e do inteligível, do concreto e do abstrato. Entretanto, é preciso estar atendo ao fato de que o desenho pode também ser um obstáculo à figura, pela atração perceptiva que ele oferece (MAIA, 2009, p.38-39).

Esse debate sinalizado pela autora, também defendido por Câmara dos Santos (1992; 2001; 2009), contribui para uma melhor análise da complexidade que pode ser instaurada na classe em Matemática: geometria do sensível *versus* geometria do inteligível.

Essa lógica promove a discussão acerca da função das representações gráficas como intermediários susceptíveis de simplificar ou complicar o entendimento e o acesso dos objetos físicos para os objetos ideais, que são deveras de natureza geométrica. Assim, o aluno penetra na realidade efetivamente matemática (MAIA, 2009).

No tópico a seguir, discutiremos sobre o conceito matemático que é objeto de estudo de algumas pesquisas já mencionadas nesse texto, de modo específico. Apresentamos um breve debate sobre os quadriláteros notáveis.

2 OS QUADRILÁTEROS: EM BUSCA DE UMA DEFINIÇÃO

Conforme já indicam os documentos curriculares (BRASIL, 1997; 2017; PERNAMBUCO, 2012), a definição para o conceito quadriláteros é inicialmente apontada nos anos iniciais do ensino fundamental. No sexto ano ocorre a sistematização desse tópico e a partir do oitavo ano são propostas algumas demonstrações das suas propriedades. Nesse sentido, é aguardado que, no ensino médio, os alunos tenham domínio desse saber matemático.

Todavia, resultados de pesquisas educacionais (bem como nossa experiência enquanto professor de Matemática do ensino básico) têm mostrado que estudantes do ensino médio, e de anos anteriores, apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas aos quadriláteros. Tal fato também é verificado com relação aos estudantes de licenciatura em Matemática e com professores (formados) em exercício docente.

Entre essas dificuldades, podemos mencionar as referentes às situações de construção, classificação e estabelecimento de relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Por exemplo, um quadrado não é reconhecido como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

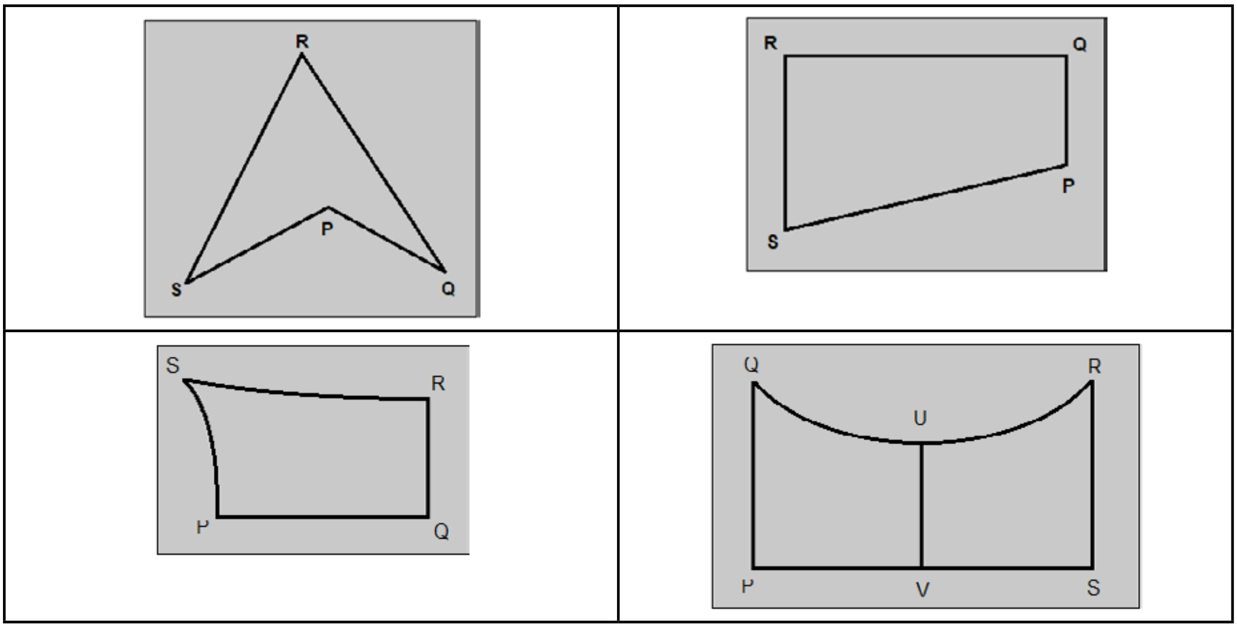
Talvez, a história da Matemática nos ajude a compreender o surgimento desses problemas conceituais referentes aos quadriláteros. Desse modo, o estudo da evolução da definição desse conceito, ao longo da história, pode se tornar fundamental na busca de respostas para essas dificuldades.

Diante desse cenário, compete aqui oferecermos um momento para mostrarmos algumas definições sobre os quadriláteros notáveis, apresentadas ao longo da história por alguns estudiosos em Matemática. Assim, será possível verificarmos as principais alterações submetidas à definição do mencionado conceito geométrico.

Mas antes de se discutir especificamente sobre os quadriláteros notáveis, apresentamos uma breve exposição referente aos quadriláteros, que também inclui os não notáveis e os não euclidianos. Afinal, o que são quadriláteros?

Consideremos quatro pontos aleatórios em um plano ou uma superfície (hiperbólica ou elíptica), tais como *P*, *Q*, *R*, *S*, de modo que três quaisquer deles não façam parte de uma mesma reta. Então, a coleção de pontos pertencentes aos segmentos de reta *PQ*, *QR*, *RS* e *SP,* ou então a porção do plano ou da superfície composta por todos esses segmentos de reta, nominamos de quadrilátero *PQRS*. A Figura 1 apresenta alguns exemplos de representações de quadriláteros.

Figura 1 – Representações de alguns quadriláteros



Fonte: elaborado pelo autor

Na Geometria, podemos verificar a existência de duas naturezas de quadriláteros, a dos quadriláteros euclidianos e a dos quadriláteros não euclidianos. Os euclidianos são formados pelos notáveis e pelos não notáveis, enquanto que os não euclidianos são compostos pelos quadriláteros hiperbólicos e pelos quadriláteros elípticos.

Desse modo, na Figura 1, os quadriláteros situados na parte superior são do grupo dos euclidianos, já os localizados na parte inferior são da família dos não euclidianos. A principal diferença entre esses dois tipos de quadriláteros, é que os primeiros existem em um plano euclidiano, e os demais se encontram em superfícies, hiperbólica ou elíptica, isto é, em espaços geométricos não euclidianos. No grupo dos quadriláteros euclidianos, os notáveis são constituídos pelos trapézios e pelos paralelogramos. Por sua vez, os não notáveis são representados pelos quadriláteros não convexos[3] e pelos trapezoides[4].

Assim, na Figura 1, o quadrilátero do lado esquerdo superior é um quadrilátero euclidiano não notável, pois ele é não convexo. O localizado no lado direito superior é um trapézio, logo, é um quadrilátero euclidiano notável. Na parte inferior, o do lado esquerdo é um quadrilátero hiperbólico e

3 Em um quadrilátero não convexo há um ângulo, no qual a medida de sua abertura é maior que 180º. As suas diagonais não se encontram em nenhum ponto, sendo que uma delas possui pontos, incluídos no segmento de reta que as formam, fora da região interna.

4 O trapezoide consiste em um quadrilátero sem lados opostos paralelos. Suas diagonais se encontram em único ponto na região interna.

do lado direito é um elíptico, portanto, esses dois últimos são quadriláteros não euclidianos.

Os quadriláteros euclidianos possuem algumas propriedades e características, entre elas, mencionamos: a soma das medidas da abertura dos ângulos internos é igual a 360º; apresentam apenas duas diagonais, quatro vértices, quatro ângulos internos e quatro lados. Com relação aos não euclidianos, a soma dos ângulos internos pode ser maior ou menor do que 360º, possuem quatro ângulos internos, quatro lados, etc.

A seguir, apresentamos uma discussão mais pontual sobre os quadriláteros não euclidianos e sobre os quadriláteros euclidianos notáveis.

3 OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: UMA ANÁLISE CONCEITUAL AO LONGO DA HISTÓRIA

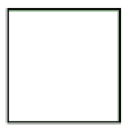
Como discutido anteriormente, os quadriláteros notáveis são formados pelos paralelogramos (que também incluem o losango, o retângulo e o quadrado) e pelos trapézios. Em decorrência do desenvolvimento da própria Matemática, a definição desses quadriláteros foi passando por mudanças ao longo da história humana.

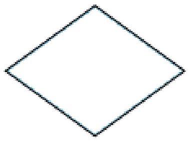
Conforme sinalizado por Bongiovanni (2004), são três as principais definições encontradas na literatura para os quadriláteros notáveis. Tais definições são diversas, que em conformidade com o tipo de classificação aplicada, admitem diferentes relações entre si.

No livro I de *Os elementos*, em especial, a definição 19, o grego Euclides de Alexandria considera que toda figura composta por quatro linhas constitui uma figura quadrilátera. Na definição 22, posteriormente, ele expõe atributos aos quadriláteros notáveis, segundo o Quadro 1.

Com base nessa caracterização, percebemos que o oblongo proposto por Euclides é um caso específico do quadrilátero notável atualmente chamado retângulo. Nessa mesma linha de entendimento, o rombo é o atual losango e o rombóide é o que consideramos recentemente como paralelogramo oblíquo.

Quadro 1 – Quadriláteros notáveis segundo Euclides

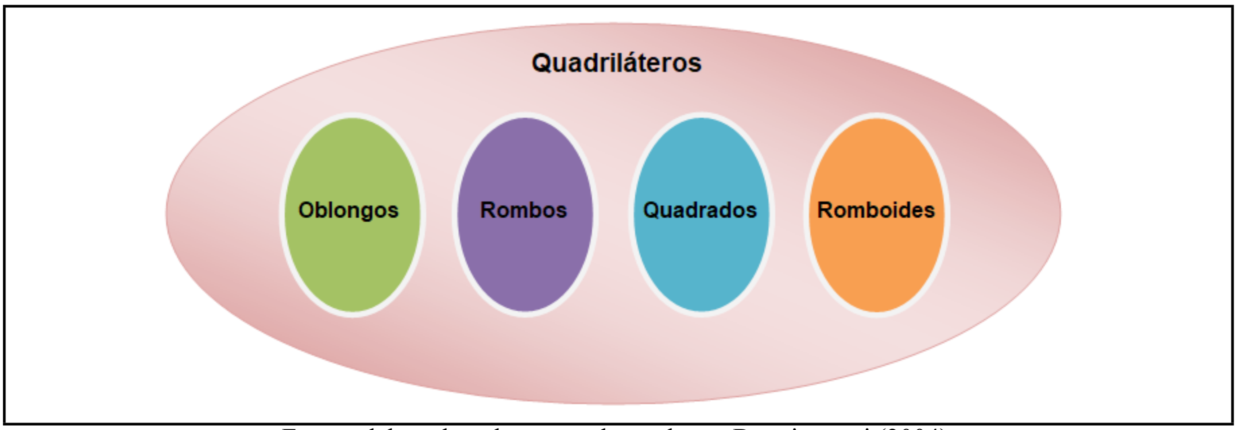
QUADRILÁTERO NOTÁVEL	**DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS**	**REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA**
Quadrado	É uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos	

Oblongo	É uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais	
Rombo	É uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos.	
Romboide	É uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos.	

Fonte: Bongiovanni (2004, p.30)

Concordamos com Ferreira (2016), ao considerar que, nessa definição de Euclides para os quadriláteros notáveis, o conjunto estabelecido por cada classe é disjunto, como ilustrado a seguir pela Figura 2.

Figura 2 – Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Euclides



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Bongiovanni (2004).

Segundo Bongiovanni (2004), depois de Euclides, outros matemáticos propuseram definições diversas aos quadriláteros notáveis. O primeiro deles foi o francês Adrien-Marie Legendre, que em 1793, ao publicar o livro *Elementos de Geometria*, sugeriu uma geometria com menos intuição e com mais rigor.

Legendre caracterizou os quadriláteros notáveis da seguinte forma:

- quadrado – possui seus lados iguais e ângulos internos retos;
- retângulo – possui ângulos retos sem ter os lados iguais;
- losango – possui os lados iguais sem que os ângulos internos sejam retos;
- paralelogramo – possui os lados opostos paralelos.

Nessa definição apresentada por Legendre, podemos verificar mudanças importantes em relação à definição apontada por Euclides. Por exemplo, o rombo e o oblongo passam a ser chamados de losango e retângulo, respectivamente. Ainda, o nome do romboide é substituído pelo paralelogramo, contudo, ocorre um avanço do conceito, pois passa a apresentar lados opostos paralelos.

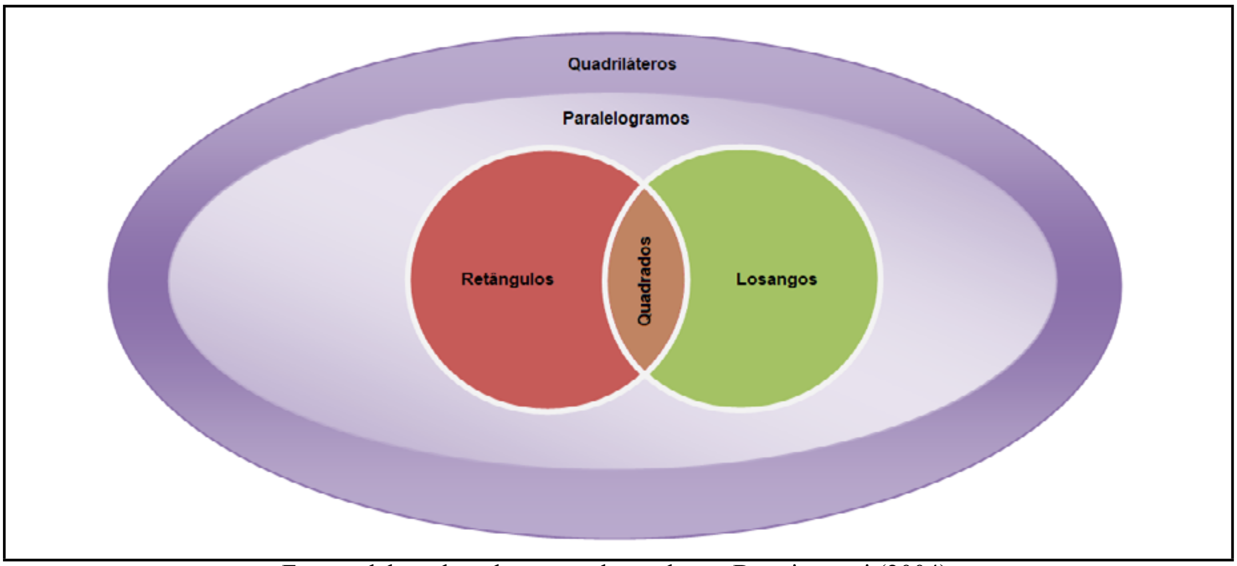
Como pontuado por Bongiovanni (2004), essa mudança na definição possibilita que os losangos, os retângulos e os quadrados sejam ainda considerados como paralelogramos. Todavia, o quadrado não é classificado como losango e nem como retângulo.

Pouco mais de um século depois, em 1898, o francês Jacques Salomon Hadamard apresenta uma caracterização mais ampla para os quadriláteros notáveis:

- quadrado – é um quadrilátero que tem todos ângulos internos iguais e todos os lados iguais;
- retângulo – é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, logo, são ditos retos;
- losango – é um quadrilátero que apresenta todos lados iguais entre si;
- paralelogramo – é um quadrilátero que possui os quatro lados paralelos dois a dois.

Com base na definição de Hadamard, podemos observar que ocorreu a supressão das limitações colocadas aos losangos e aos retângulos. Dessa maneira, qualquer quadrado pode ser classificado como retângulo e losango. Além disso, o quadrado, o retângulo e o losango podem ser considerados paralelogramos, como ilustrado a seguir pela Figura 3.

Figura 3 – Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Hadamard



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Bongiovanni (2004).

Essa versão é a mais aceita atualmente, sendo abordada nos livros didáticos de Matemática do Brasil. Além disso, Bongiovanni (2004, p.31) destaca que:

> é importante observar que o processo que permitiu evoluir para as definições modernas de Hadamard levou muitos anos. Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria e cada novo autor de manual de geometria respeitava a divisão dos conteúdos da obra de Euclides, bem como as definições e proposições.

Além dessas três versões de definição para os quadriláteros notáveis, anunciadas por Bongiovanni (2004), encontramos outras duas definições, datadas do século XX. Todavia, elas foram construídas, de certo modo, baseadas em Hadamard.

O norte-americano Edwin M. Hemmerling publicou o livro *Geometria Elementar* em 1971, no qual caracteriza os quadriláteros notáveis do seguinte modo:

- quadrilátero: todo polígono que possui quatro lados;
- paralelogramo – é um quadrilátero que tem os pares de lados opostos paralelos;
- losango – é um paralelogramo equilátero;
- retângulo – é um paralelogramo que possui um ângulo reto;
- quadrado – é um retângulo equilátero.

Nessa definição sugerida por Hemmerling, o quadrado, o retângulo e o losango são considerados paralelogramos. O quadrado é classificado como retângulo, todavia, esse matemático não deixou claro se o quadrado também é um caso particular de losango.

O brasileiro João Lucas Marques Barbosa publicou em 1985 o livro intitulado *Geometria Euclidiana Plana*, no qual caracteriza os quadriláteros notáveis. Para esse matemático:

- paralelogramo – quadrilátero cujos lados opostos são paralelos;
- retângulo – quadrilátero cujos ângulos internos são retos;
- losango – paralelogramo que possui todos os seus lados congruentes;
- quadrado – é um retângulo que também é um losango.

Essa definição proposta por Barbosa (2006) é bem similar a de Hadamard, que classifica retângulos, losangos e quadrados como paralelogramos. Os quadrados são considerados retângulos e losangos, ao mesmo tempo.

Com relação ao ensino dos quadriláteros notáveis, os resultados de pesquisas em Educação Matemática, assim como nossa experiência docente na educação básica, têm mostrado que a maioria dos estudantes possui compreensão sobre esse conceito geométrico bastante congruente com as definições de Euclides e Legendre.

Em geral, verificamos que os quadrados não são considerados losangos e retângulos, simultaneamente. Ou então, nenhum deles é classificado como paralelogramos. Desse modo, como sinalizado por Bongiovanni (2004), cada tipo de quadrilátero é reconhecido como um grupo diferente de objeto em Matemática.

Esse autor ainda recomenda que:

> compete a nós, professores de Matemática, a tarefa de acolher o saber trazido pelos alunos [...] e de fazê-los progredir lentamente para uma concepção mais ampla, como a de Hadamard, generalizando proposições relacionadas com quadriláteros (BONGIOVANNI, 2004, p.31-32).

Com relação à definição de trapézio, também não há consenso entre autores de livros didáticos e professores de Matemática. Em concordância com Bongiovanni (2010) e Ferreira (2016), duas definições são evidenciadas:

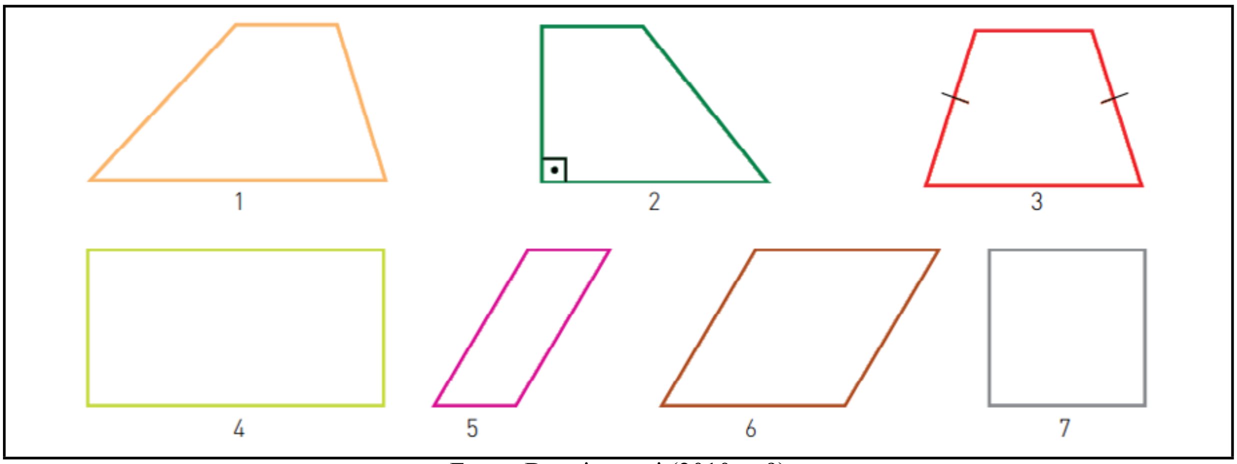
- trapézio – é um quadrilátero com um par de lados paralelos (equivalentemente, pode ser considerado um quadrilátero que tem dois lados paralelos);

- trapézio – é um quadrilátero que apresenta unicamente um par de lados opostos paralelos.

A primeira definição possibilita que os pares de lados opostos sejam paralelos, dessa forma, viabiliza que um paralelogramo seja considerado um trapézio. Essa compreensão gera incertezas em estudantes e professores de Matemática, em decorrência do realce dado às representações figurais diante às propriedades do objeto matemático (FERREIRA, 2016).

De acordo com Bongiovanni (2010), essa definição permite que sete tipos de figuras possam representar trapézios, conforme ilustrado a seguir na Figura 4.

Figura 4 – Sete tipos de figuras que podem representar trapézios



Fonte: Bongiovanni (2010, p.9)

Considerando a segunda definição, as figuras 4, 5, 6 e 7 são excluídas, pois não satisfazem tal proposição. Logo, nessa perspectiva, os trapézios podem ser representados por três tipos de figuras, que no caso ilustrado na figura a seguir, são as figuras 1, 2 e 3.

Acerca do tipo de abordagem a ser realizada para o conceito de trapézio, Ferreira (2016, p. 106) destaca que:

> ao depender da definição de trapézio adotada, é necessário haver coerência com as demais definições adotadas e propriedades enunciadas. Um caso que pode gerar incoerência é a definição de trapézio isósceles e de suas propriedades enunciadas. Ao definir este tipo de trapézio como sendo aquele que apresenta dois lados congruentes, não podemos assumir que os ângulos de suas bases e suas diagonais sejam congruentes, uma vez que o paralelogramo seria um trapézio isósceles que não satisfaz tais propriedades.

Buscando evitar essa incoerência, Bongiovanni (2010) sugeriu a seguinte definição para o trapézio isósceles: é um trapézio que possui apenas um par de lados opostos congruentes (ou então que possui exatamente um eixo de simetria).

Em nosso entendimento, essa perspectiva é um pouco ampla, pois não deixa claro que os lados opostos congruentes mencionados em tal definição não são paralelos. Talvez, uma definição mais adequada seria: *Trapézio isósceles é um trapézio que possui um único par de lados, não paralelos, opostos e congruentes*.

Além disso, é importante mencionar qual é a definição que consideraremos nesse artigo para os quadriláteros notáveis. O Quadro 2 apresenta nossa compreensão sobre esse conceito geométrico.

Quadro 2 – Caracterização dos quadriláteros notáveis

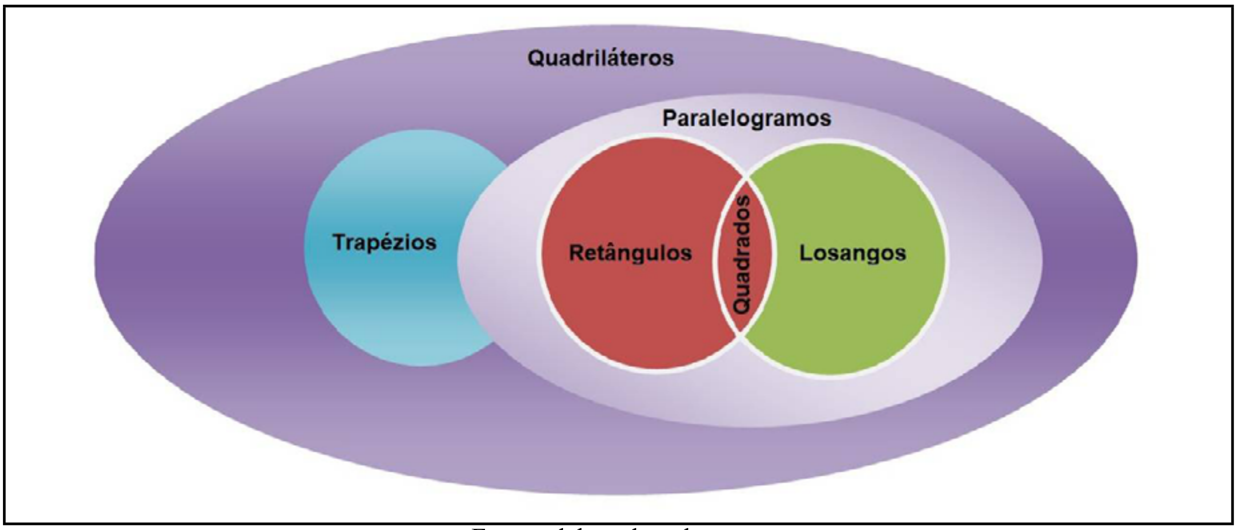
QUADRILÁTEROS	**DEFINIÇÃO**	**PROPRIEDADES**

Trapézio	É um quadrilátero notável que possui exatamente um único par de lados opostos paralelos. Esses lados são chamados comumente de bases do trapézio.	Os ângulos internos adjacentes a um mesmo lado transverso são suplementares. São classificados em três tipos: - trapézio escaleno: os lados opostos, não paralelos, não são congruentes; - trapézio isósceles: os lados opostos, não paralelos, são congruentes; - trapézio retângulo: possui dois ângulos internos congruentes retos. Os trapézios isósceles apresentam diagonais congruentes.
Paralelogramo	É um quadrilátero notável que apresenta os dois pares de lados opostos paralelos entre si.	Os lados opostos são congruentes. Os ângulos internos opostos são congruentes. Dois ângulos internos adjacentes quaisquer são suplementares. As diagonais se cortam ao meio, em seus respectivos pontos médios.
Retângulo	É um paralelogramo que tem ângulos internos retos.	As diagonais dos retângulos são congruentes.
Losango	É um paralelogramo que possui todos os lados congruentes.	As diagonais são perpendiculares entre si, e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos.
Quadrado	É um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.	As diagonais são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos.

Fonte: elaborado pelo autor

Pelo Quadro 2, é possível verificarmos que a definição utilizada nesse artigo é baseada na compreensão de Hadamard, na qual há duas classes nos quadriláteros notáveis: os trapézios e os paralelogramos (que também inclui os quadrados, os losangos e os retângulos). Ainda, o quadrado é um retângulo e losango, de modo simultâneo. Essa caracterização encontra-se ilustrada na Figura 5.

Figura 5 – Conexões entre os quadriláteros



Fonte: elaborado pelo autor

Concordamos com Ferreira (2016) ao indicar que as características apresentadas por Bongiovanni (2004; 2010) aos quadriláteros notáveis indicam a forma pela qual esse conceito possibilita explorar os encadeamentos de uma visão desacertada acerca de uma definição.

Além de que, matematicamente, o ensino dos quadriláteros propicia a abordagem de uma quantidade relevante de propriedades em Geometria, aplicadas, em especial, à solução de problemas matemáticos. Por meio do uso de instrumentos geométricos, o estudo desse conceito geométrico facilita a construção de hipóteses, mobilização de teoremas, provas e demonstrações.

Os quadriláteros notáveis constituem um conceito em Geometria que permite o estudante realizar transformações cognitivas importantes ao desenvolvimento do pensamento geométrico, tais como a identificação, a conversão e o tratamento, conforme pressupostos teóricos defendidos por Duval (1995).

No tópico a seguir, discutiremos sobre as situações didáticas verificadas em livros didáticos de Matemática, que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis.

4 SITUAÇÕES QUE DÃO SENTIDO AOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Para a proposição da tipologia de situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis, utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1986) e seus seguidores. Segundo esse autor, o conhecimento matemático é formado a partir de campos conceituais, compreendidos como conjuntos de situações.

Nessa direção, o conceito de quadriláteros notáveis, de modo pragmático, pode ser compreendido por um conjunto composto de três elementos que não podem se dissociar:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto dos invariantes operatórios, isto é, as propriedades do conceito, que não sofrem variações ao longo das situações (significado);

R: conjunto das representações simbólicas do conceito (significante).

Acerca da indissociabilidade desses três elementos, Borba (2009, p.61) destaca que:

> embora estas definições sejam intrinsecamente mescladas, para efeito de análise de conceitos e de organização do ensino dos mesmos, pode-se separar cada uma das dimensões e observar o seu efeito isolado, quando as outras duas se mantêm constantes. Este isolamento das dimensões permite o professor identificar quais aspectos das três dimensões se desenvolvem mais facilmente por parte dos alunos.

Desse modo, no levantamento das situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis, não discutiremos sobre os invariantes operatórios e as representações simbólicas, pois não é objetivo de nossa pesquisa. A descrição apenas das situações se justifica, pois, o modelo que propomos nesse artigo refere-se à abordagem dos quadriláteros em dois cenários: produção e classificação.

É importante destacar que o conceito de quadriláteros notáveis pode ser entendido como um elemento do campo conceitual da Geometria. Além disso, outros componentes fazem parte desse campo, tais como os conceitos de ângulo, segmento de reta, pontos, triângulos, congruência, circunferência, etc. Ainda, podemos observar articulação com outros campos conceituais (Grandezas e Medidas, Álgebra, Números, etc.).

Aqui, as situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis são propostas a partir das tarefas presentes em livros didáticos de Matemática, sobretudo, no capítulo destinado ao mencionado conceito.

Dito de outra forma, são situações didáticas geralmente encontradas em livros didáticos. Logo, essas situações foram classificadas em três principais tipos: classificação, construção e inclusão.

Na situação de classificação ou identificação, o estudante reconhece/identifica o quadrilátero notável a partir da sua representação geométrica no plano. Por exemplo:

<table>
<tr><td>Observe os quadriláteros e responda:
a) Algum deles é quadrado? Qual?
b) Algum deles é trapézio? Qual?
c) Algum deles é losango? Qual?
d) Algum deles é paralelogramo? Qual?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade voltada para alunos do 6º do ensino fundamental</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor

Na situação de construção, é solicitada ao aluno a construção do quadrilátero notável por meio da sua representação geométrica. Por exemplo:

Construa um paralelogramo, sabendo-se que o seu perímetro mede 21 cm.	Crie o segmento de reta TC. Em seguida, construa o quadrado TOCA, de forma que TC seja sua diagonal.
Atividades voltadas para alunos do 8º do ensino fundamental	

Fonte: elaborado pelo autor

Na situação de inclusão, para resolver o problema proposto, o discente deve estabelecer relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Por exemplo:

Indique uma característica do quadrado que o retângulo também possui. Indique ainda uma característica do quadrado que o retângulo, geralmente, não tem. O que se pode concluir diante disso?
Atividades voltadas para alunos do 6º do ensino fundamental

Fonte: adaptado de Imenes e Lellis (2014).

Segundo Vergnaud (1986), é importante em sala de aula, o professor explorar essas situações de forma diversificada, isto é, não enfatizar apenas uma única situação, em detrimento das demais. Tal fato contribuirá com o processo de conceitualização pelos estudantes.

Além disso, o uso das situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis na organização de tarefas possibilita uma melhor compreensão das produções dos alunos, pois, em decorrência da tipologia proposta, é viável enfatizar e distinguir cada tipo de tarefa explorada. Essa opção contribui para um maior esclarecimento dos saberes e das estratégias que os discentes utilizam na resolução de problemas.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste artigo, verificamos que, apesar de todos os avanços nas pesquisas educacionais, o fenômeno da omissão geométrica ainda continua afetando as aulas de Matemática, tanto no ensino básico como nos cursos de formação de professores.

Essa omissão é influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna, que propôs algebrizar o ensino da Geometria, a partir do formalismo e do rigor matemático. Além disso, fatores epistemológicos contribuem para esse quadro, especificamente, a relação dialética entre geometria do mundo sensível e a do mundo inteligível.

Ao longo da história humana, percebemos que os quadriláteros notáveis constituem um conceito em constante transformação e desenvolvimento. Algumas dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por estudantes de diferentes níveis escolares possuem proximidades com as definições propostas por Euclides e Legendre, tais como não considerar o quadrado como retângulo e losango ao mesmo tempo.

Por fim, destacamos a importância do professor ao utilizar o livro didático de Matemática em sala de aula, abordar os quadriláteros notáveis a partir de diferentes situações didáticas que dão sentido a esse conceito. Assim, o estudante terá mais condições de obter sucesso no processo de conceitualização em Matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Fortaleza: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BKOUCHE R. Enseigner la géométrie, pourquoi? **Repères-IREM**, Lille, v.1, n.1, p.92-102, 1988.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 55, p. 29-32, 2004.

________________. Sobre definições de trapézios isósceles. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 72, p. 9-10, 2010.

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros relativos. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p.58-102.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

________________. **Base Nacional Curricular Comum**. 3ª versão revista. Ministério da Educação, Brasília, 2017.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Analyse didactique d'un materiel pour les premiers apprentissages en géométrie**. 1992. Mémoire (Master en Didactique Des Disciplines Scientifiques) – Université Claude Bernarde Lyon 1, Lyon, 1992 .

________________. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. *In*: CONGRES INTERNATIONAL CABRI GÉOMÈTRE, 2., 2001, Montreal. **Annales** [...]. Montreal: CICAG, 2001, p.1-12.

________________.O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p.177-211.

CORREIA, J. C. C.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. **Revista Triângulo**, Uberaba, v. 10, n.2, p. 74-93, 2017.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

FERREIRA. M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática:** 6º ano. Guia do professor. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2014.

KALEFF, A. M. M. R.. Considerações sobre a Diversidade Dos Saberes Docentes e a Formação em Geometria do Professor de Matemática nos Cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense – Niteroi. **Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v.6, n.1, p.7-38, 2017.

LIMA BORBA, V. M.; PEREIRA DA COSTA, A. Sucesso e Fracasso no ensino de Matemática: o que dizem futuros professores de uma IES? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática – ReBECEM**, Cascavel, v.2, n.1, p. 55-76, 2018.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Brasília, v.1. n.4, p.3-13, 1995.

______________. Apresentação. *In*: RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de Geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012. p.xiiixiv.

MAIA, L. S. L. Vale a pena ensinar Matemática. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 13-57.

MONTEIRO, T. T. M.; ROSA DOS SANTOS, M. O livro didático do 6º ano do ensino fundamental: uma análise sobre a praxeologia matemática dos quadriláteros. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Recife. **Anais** [...]. Campina Grande: Realize Eventos, 2018. p. 1-12.

MORETTI, M. T.; HILLESHEIM, S. F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 9, n.1, p. 1-19, 2018.

PACHÊCO, F. F. F.; PACHECO, G. F. ; SILVA, A. D. P. R. Uma análise em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.12, n.2, p. 101-115, 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.1, n.1, p.7-17, 1993.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

________________. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

PEREIRA DA COSTA, A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez. **Anais** [...]. Tuxtla Guitérrez: CIAEM, 2015a. p.1-9.

________________. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais** [...] Ilhéus: UESC, 2015b. p.998-1009.

________________. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v.5, n.2, p.3-17, 2016a.

________________. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v.7, n.3, p.1-19, 2016b.

________________. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. **Educação Online**, Rio de Janeiro, v.1, n.22, p.1-19, 2016c.

________________. O uso do GeoGebra no ensino de quadriláteros notáveis: um estudo com alunos do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 6, n.2, p. 10-24, 2017a.

________________. O desenvolvimento do pensamento geométrico no estudo dos quadriláteros notáveis sob a ótica vanhieliana. **Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v.6, n.2, p. 1-31, 2017b.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática no estado de Pernambuco. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** […]. São Paulo: SBEM – Regional SP, 2016. p. 1-12.

________________. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **Educação Online**, Rio de Janeiro, v.1, n. 25, p.1-23, 2017a.

________________. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. **Educação Matemática em Revista – RS**, Porto Alegre, v.1, n. 17, p.1-20 ,2017b.

________________. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista de Educação Matemática – SP**, São Paulo, v. 15, n.19, p. 353-372, 2018a.

________________.O conceito de quadriláteros notáveis sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático: um olhar para os tipos de tarefas em um livro didático de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 59, p. 39-52, 2018b.

________________.A abordagem do conceito de ângulo em um livro didático de Matemática do 8º ano do ensino fundamental. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2018, Cajazeiras. **Anais** [...] Cajazeiras: SBEM Regional Paraíba, 2018c. p. 1-12.

________________.Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista – RS**, Porto Alegre, v. 2, n.19, p. 189-197, 2018d.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. UFJF, Juiz de Fora, 2012.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. M. **Espaço e forma:** a construção geométrica pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

SANTOS, I. P.; ROSA DOS SANTOS, M. A organização matemática do livro didático do 6º ano do ensino fundamental em relação ao estudo de triângulos. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Recife. **Anais** [...]. Recife: Realize Eventos, 2018. p. 1-12.

SILVA, A. B.; SILVA, L. B. O currículo de geometria e a formação do professor de matemática. *In*: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNAMBUCO, 5., 2014, Garanhuns. **Anais** [...]. Garanhuns: UFRPE, 2014. p.1-10.

RÊGO. R. G.; RÊGO. R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, v.1, n.5, p.75-90, 1986.