REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

ISSN 1981 8979
v.9, n.1, janeiro / abril 2020

LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA E O CONCEITO DE DISTÂNCIA: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

DIDACTIC BOOKS OF MATHEMATICS AND THE CONCEPT OF DISTANCE: AN ANALYSIS BY THE LIGHT OF THE THEORY OF THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS

Gabriel de Oliveira Soares
gsoares8@outlook.com
Universidade Franciscana (UFN)

José Carlos Pinto Leivas
leivasjc@yahoo.com.br
Universidade Franciscana (UFN)

RESUMO

Este trabalho objetiva analisar como é utilizado o conceito de distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e do Ensino Superior, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2008; 2013). Metodologicamente, elencaram-se cinco livros didáticos para as análises, sendo proposto um quadro de questões que buscou verificar como se desenvolve a introdução dos alunos aos conceitos das distâncias e as características que um aluno, estudando pelos livros, pode desenvolver, além de identificar 'os já-encontrados' necessários para compreender essas abordagens didáticas. A análise possibilitou verificar que a maioria das questões objetiva o desenvolvimento de características dos Mundos Simbólico, estando presentes, também, características dos Mundos Corporificado e Formal nos dois níveis de ensino. Acredita-se que essa análise pode contribuir para o ensino de Geometria Analítica, tornando sua aprendizagem mais efetiva.

Palavras-chave: Ensino de Geometria Analítica; Livros Didáticos; Três Mundos da Matemática.

ABSTRACT

This paper aims to analyze how the concept of distance between two points and distance from a point to a line in Mathematics textbooks of High School and Higher Education by the light of The Theory of the Three Worlds of Mathematics, proposed by David Tall (2008; 2013). Methodologically, five textbooks were presented for the analysis, and a framework of questions was proposed, trying to verify how the introduction to the concepts of distances and characteristics that a student studying by the books can develop in addition to identifying the 'met-befores' necessary to understand these didactic approaches. The analysis allows to verify that most of the questions aim at the development of characteristics of the Symbolic Worlds, being also present characteristics of the Formal and Embodied Worlds in the two levels of education. It is believed that this analysis can contribute to the teaching of Analytical Geometry, making its learning more effective.

Keywords: Teaching of Analytical Geometry; Didatic books; Three Worlds of Mathematics.

Submetido: 14 de fevereiro de 2020 / Aceito: 16 de julho de 2020

1. INTRODUÇÃO

O trabalho com conceitos da Geometria Analítica perpassa a formação escolar de crianças e adolescentes, estando presente tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, ainda podendo ser estudado em cursos universitários. Entretanto, um estudo matemático mais rigoroso tem início no Ensino Médio, geralmente justificado por apresentar conceitos relevantes para a aquisição de conhecimentos em nível superior.

Estudos como os de Karrer (2006), Richit (2005), Silva (2006), Santos (2008) e Dallemole (2010) mostram, todavia, que os estudantes têm muita dificuldade em organizar o pensamento de forma matematicamente correta nessa disciplina, principalmente, porque ela relaciona tópicos geométricos com pensamentos algébricos e isso não é feito de maneira tão fácil pelos alunos. Para Leivas (2002, p. 44),

> esta questão de tratar os pensamentos algébricos e geométricos juntos me parece muito relevante para resgatar uma perda grande registrada pela história, a saber, a Álgebra desenvolvida para resolver os problemas geométricos. O que foi visto até o início desta década foi uma inversão total desse aspecto histórico. Felizmente, há um número grande de pessoas no Brasil e no mundo refletindo sobre isso, e creio já estarmos revertendo a situação.

Dessa forma, os estudos voltados a melhorar as práticas de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica devem trabalhar com propostas que visem melhorar o entendimento das figuras geométricas, por meio de leis e o entendimento dessas por figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de leis, equações e inequações, sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas (BRASIL, 2006).

Ainda sobre isso, recorre-se aos Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM+), ao afirmarem que um aluno, ao estudar Geometria Analítica,

> deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente (BRASIL, 2004, p. 124).

Levando em conta a necessidade dessa articulação nas maneiras que o estudante deve desenvolver ao estudar Geometria Analítica, pode-se remeter à uma teoria de aprendizagem em Matemática que dê suporte ao ensino. Uma dessas teorias a serem consideradas é a Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2008; 2013).

Ela surge para analisar como se desenvolve o pensamento matemático com vistas a três vieses: um relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, a que o autor se refere como Corporificado; o segundo, relacionado às características matemáticas dos objetos em uma maneira escrita, ao qual o autor chama de Simbólico e um terceiro, relacionado ao formalismo matemático dos conceitos, denominado Axiomático-Formal.

Nesse sentido, pensando que a prática do professor em sala de aula, desenvolvida com a Geometria Analítica no Ensino Médio e no Ensino Superior desenvolve-se também com o auxílio de recursos didáticos, entre eles, o livro didático, surge a proposta desse trabalho. O mesmo tem por objetivo analisar quais características dos Três Mundos da Matemática estão mais presentes em alguns livros didáticos utilizados como referências para o trabalho com os conceitos de distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior. Assim, conhecendo essas abordagens, o professor poderá planejar-se para atender as mais diferentes demandas de aprendizagem que surgem no dia a dia do cotidiano docente.

2. MUNDOS DA MATEMÁTICA

Segundo Tall (2013, p. 133, tradução nossa), "o pensamento matemático envolve a compreensão das estruturas matemáticas em *conceitos pensáveis* conectados às estruturas do conhecimento que, misturadas, levam aos *conceitos cristalinos* que tem uma inevitável estrutura matemática".

Dessa forma, buscando explicar como se dá esse desenvolvimento do pensamento matemático, Tall cria um quadro teórico no qual afirma a existência de três maneiras diferentes de desenvolvimento cognitivo ao aprender matemática. A cada uma dessas formas de aprender, o autor dá um nome, chamando-os de Mundos da Matemática: o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático. Esses, são apresentados de acordo com Tall (2013):

a) O Mundo Conceitual Corporificado, ou apenas Mundo Corporificado, é "baseado em percepções e ações humanas, desenvolvendo imagens mentais verbalizadas de maneiras cada vez mais sofisticadas, se tornando, nos processos mais elevados de corporificação, perfeitos entes mentais na nossa imaginação" (TALL, 2013, p. 133). Dessa forma, ao desenvolver o pensamento matemático através de experiências de aprendizagem, estas irão se relacionar com objetos corporificados, como gráficos e tabelas. Lima (2007, p. 74) traz um exemplo claro de uma situação que se encaixa nesse mundo:

> por exemplo, ao buscarmos a medida x de um dos lados de uma figura geométrica, cuja área é igual à de uma outra figura que tem um dos lados também de medida x, estaremos relacionando uma equação com a igualdade entre as áreas e dando significado para os símbolos que sejam relacionados com a corporificação de figuras geométricas.

b) O Mundo Operacional Simbólico, ou Mundo Simbólico, se desenvolve "através da transposição das ações corporificadas do homem em procedimentos simbólicos de manipulação e cálculo, que podem ser comprimidos em proceitos[1], para permitir um pensamento operacional flexível" (TALL, 2013, p.

1 Proceito é definido por Gray e Tall (1994) como um amálgama de conceito e processo, representados pelo mesmo símbolo. Por exemplo, o símbolo "+3" pode evocar tanto o processo de adicionar 3 quanto o conceito do número positivo +3.

133). O autor ainda afirma que as tarefas matemáticas que envolvem esse mundo iniciam muito cedo, ainda nas crianças, envolvendo ações como apontar e contar, e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos (SOARES, 2019).

Angelini (2010, p. 57) traz que:

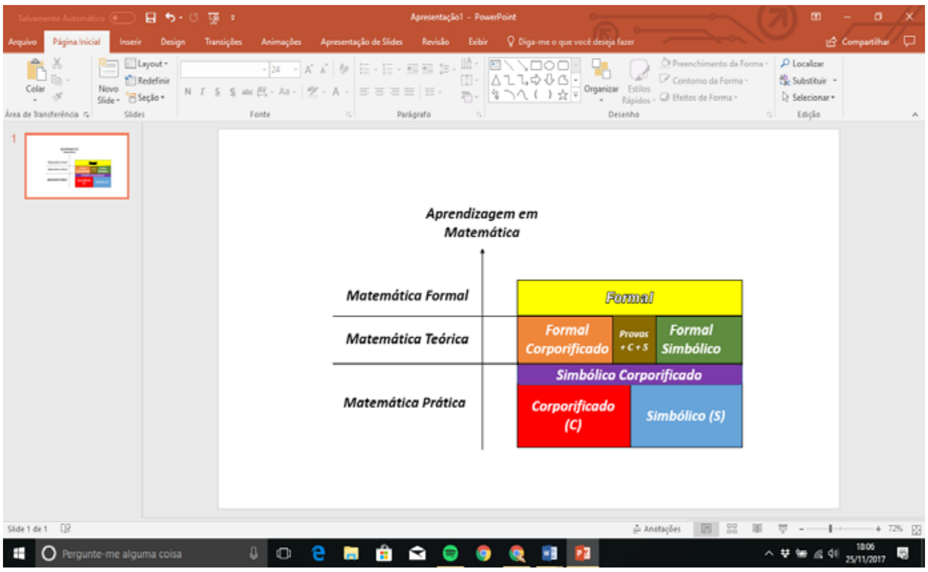
> são exemplos de características do mundo simbólico referente à função: a expressão algébrica, como a forma genérica y=ax+b; as possíveis notações de função f(x), g(x), entre outras; a regra de três utilizada nos cálculos de proporcionalidade direta; o uso de símbolos para cálculos em Aritmética, para manipulações em Álgebra e Cálculo.

Destaca-se que, nesse mundo, a linguagem necessita de certa arguição matemática, entretanto, ainda, não de um formalismo. Mesmo assim, é necessário operar-se com os símbolos para realizar certas conclusões.

c) O Mundo Formal Axiomático, ou Mundo Formal, que “constrói conhecimentos formais em sistemas axiomáticos especificados por definições teóricas, cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas” (TALL, 2013, p. 133). Logo, esse se baseia em definições, teoremas e axiomas para especificar as estruturas matemáticas (SOARES, 2019).

A articulação dos diferentes Mundos da Matemática dá origem a um quadro, adaptado de Tall (2013), que envolve com diferentes estágios de desenvolvimento da Matemática: a Matemática Prática, a Matemática Teórica e a Matemática Formal. A Figura 1 traz uma adaptação de Soares (2018) das ideias de Tall sobre essa articulação.

Figura 1 – Intersecções entre os Mundos da Matemática



Fonte: Soares (2018, p. 27; adaptado de Tall (2013, p. 198)

Nos níveis mais básicos, incluídos na Matemática Prática, as ações envolvem tarefas como reconhecer e nomear figuras geométricas e fazer cálculos aritméticos ou algébricos simples. Já a Matemática Teórica, segundo Tall (2013, p. 19), "inclui os níveis mais sofisticados de corporificação e simbolismo". O nível da Matemática Formal refere-se ao desenvolvimento de provas axiomáticas formais, baseadas em definições da teoria dos conjuntos e provas matemáticas de teoremas.

Além dos mundos, um elemento chave no quadro teórico de Tall corresponde aos chamados *met-before*, ou já-encontrados, que seria "um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente" (LIMA; TALL, 2008, p.6).

Assim, essas experiências podem auxiliar no desenvolvimento de outras; entretanto, algumas acabam levando os estudantes a terem ideias erradas sobre os conceitos matemáticos e interferem na aprendizagem de novos conteúdos (TALL, 2013). Logo, concebê-las no quadro teórico e quando se ensina Matemática se faz essencial, a fim de estabelecer o que é necessário aprender antes para poder influenciar positivamente nas novas experiências em Matemática, os *met-after*, ou os a-encontrar.

3. METODOLOGIA

O trabalho aqui apresentado encaixa-se como um estudo de natureza qualitativa, do tipo bibliográfico. Bocatto (2006, p. 266) cita que "a pesquisa bibliográfica busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas".

A análise dos capítulos dos livros didáticos focalizou como são desenvolvidos os conceitos de distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta em livros do Ensino Médio e Superior. Nesse estudo, assim como na proposta realizada em Soares e Cury (2017), buscou-se compreender como se dá a abordagem dos conceitos analisados, quais "já-encontrados" fazem parte e são necessários para a compreensão dos conceitos de distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta e, ainda, quais características dos Três Mundos da Matemática são evidenciadas a um aluno que estuda pelo capítulo do livro relativo a tal conteúdo.

Para tal análise, foram utilizadas as questões propostas por Soares e Cury (2017), que são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Questões propostas para a análise dos livros didáticos

Questões propostas para a análise dos livros didáticos
• Como é feita a introdução dos conceitos de distância? • Como é desenvolvido o conceito? • Quais "já-encontrados" são necessários e utilizados para a compreensão dos conceitos de distância? • Quais características da Teoria dos Três Mundos da Matemática estão evidenciadas na abordagem do livro e que o aluno poderá desenvolver ao estudar por ele?

Fonte: Soares; Cury (2017).

A fim de atender o objetivo do estudo, foram selecionadas cinco bibliografias básicas, três do nível médio e duas do nível superior, as quais estão apresentadas no Quadro 2, para visualizar e comparar as abordagens de cada um dos livros ao desenvolver os conceitos. Os livros do Ensino Médio foram escolhidos por constarem no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e os do Ensino Superior por constarem na ementa de dois cursos de Licenciatura em Matemática do estado do RS consultados. Além disso, esses estão presentes no arquivo pessoal dos autores do trabalho.

Quadro 2 - Bibliografias analisadas no trabalho.

Livros do Ensino Superior	**Livros do Ensino Médio**
• WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Makron Books, 2000. • REIS, G.L.; SILVA, V.V. Geometria Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.	• SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. Matemática: ensino médio. v. 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. • DANTE, L.R. Matemática: contexto e aplicações. v. 3. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010. • IEZZI, G., et. al. Matemática: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

Fonte: dados da pesquisa.

Ao evidenciar essas características dos livros em relação aos conceitos analisados, crê-se que se pode contribuir em uma melhoria efetiva para a aprendizagem de matemática em sala de aula, levando em conta as adaptações que um professor, ao utilizar algumas das referências citadas, pode realizar em sua aula a fim de propor mais experiências em outros Mundos da Matemática.

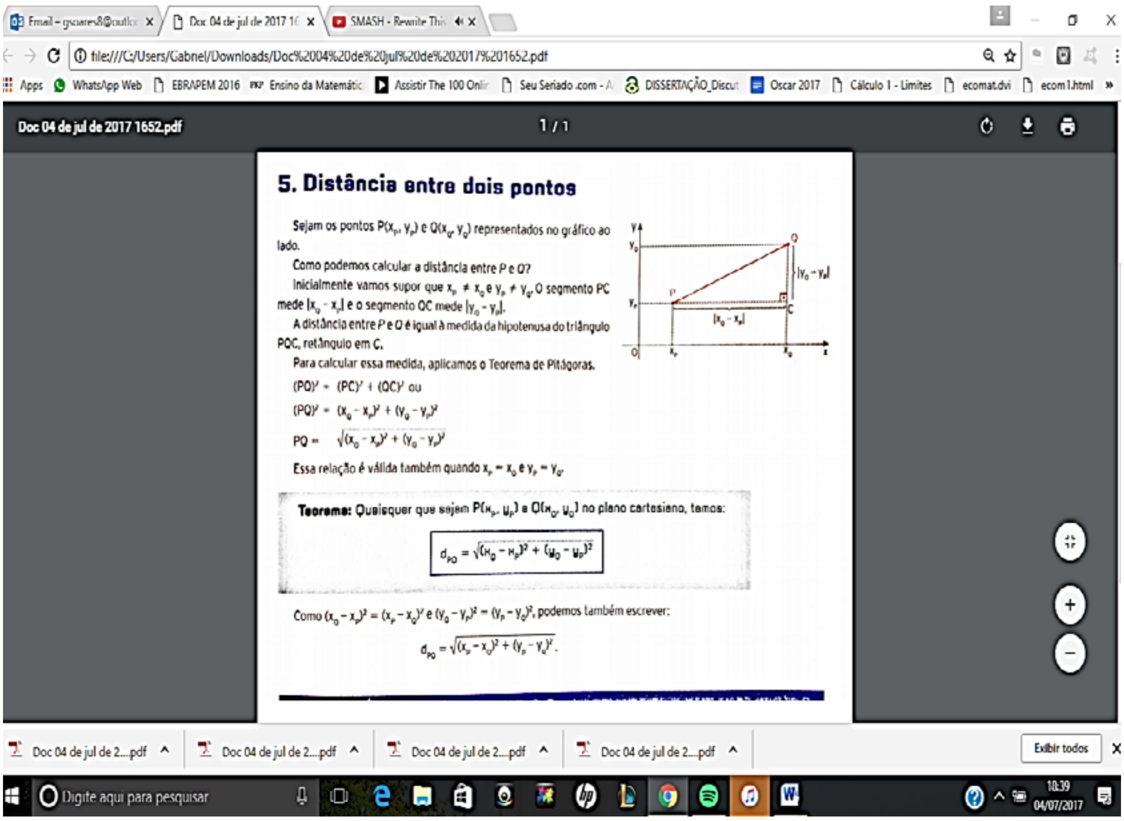
4. RESULTADOS

Nessa seção, propõe-se analisar trechos dos livros didáticos referenciados na metodologia, Quadro 2, nos quais são desenvolvidos os conceitos de distância entre dois pontos e distância entre um ponto a uma reta. Para tal, foram escaneadas as páginas dos livros que trabalham com esses conceitos e são apresentados alguns recortes que se consideraram importantes para a discussão.

4.1 Análise do livro de Smole e Diniz (2010)

O conceito de distância entre dois pontos é um dos primeiros apresentados no livro de Smole e Diniz (Figura 2). As autoras propõem uma introdução que se desenvolve por meio da simbologia matemática, além de trazer a visualização gráfica para um exemplo generalizado.

Figura 2 – Introdução ao conceito de distância entre dois pontos



5. Distância entre dois pontos

Sejam os pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ representados no gráfico ao lado.

Como podemos calcular a distância entre P e Q?

Inicialmente vamos supor que $x_P \neq x_Q$ e $y_P \neq y_Q$. O segmento PC mede $|x_Q - x_P|$ e o segmento QC mede $|y_Q - y_P|$.

A distância entre P e Q é igual à medida da hipotenusa do triângulo PQC, retângulo em C.

Para calcular essa medida, aplicamos o Teorema de Pitágoras.

$(PQ)^2 = (PC)^2 + (QC)^2$ ou

$(PQ)^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$

$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

Essa relação é válida também quando $x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$.

Teorema: Quaisquer que sejam $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ no plano cartesiano, temos:

$$\boxed{d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}}$$

Como $(x_Q - x_P)^2 = (x_P - x_Q)^2$ e $(y_Q - y_P)^2 = (y_P - y_Q)^2$, podemos também escrever:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Fonte: Smole, Diniz (2010 p. 39).

Entretanto, apesar dessa intervenção indicar características dos Três Mundos propostos na teoria de Tall, ela é diretamente apresentada de uma maneira pronta para os alunos, não discutindo outras possibilidades que poderiam levar o aluno a uma maior apropriação desse conhecimento.

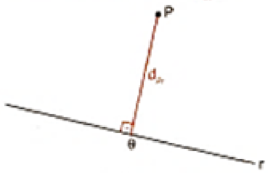
Aliás, essa maneira de apresentação é desenvolvida ainda, ao introduzir o conceito de distância entre ponto e reta, conforme se verifica na Figura 3, apresentada a seguir.

Figura 3 – Introdução ao conceito de distância entre ponto e reta.

1. Distância de um ponto a uma reta

Sejam uma reta r e um ponto $P(x_P, y_P)$.
A distância de P a r será indicada por d_{Pr}.
É claro que:

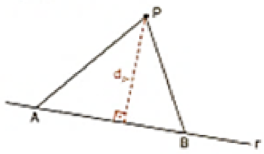
$d_{Pr} = 0 \Leftrightarrow P \in r$
$d_{Pr} > 0 \Leftrightarrow P \notin r$



Se P não pertence à reta, d_{Pr} é a medida do segmento PQ com Q ponto de reta e $\overline{PQ} \perp r$.

Para $P \notin r$, quaisquer que sejam os pontos distintos $A(x_A, y_A) \in r$ e $B(x_B, y_B) \in r$, existe o $\triangle PAB$, no qual:

$A_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot |D|$
Mas $A_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot d_{AB} \cdot d_{Pr}$. Então:
$\frac{1}{2} \cdot d_{AB} \cdot d_{Pr} = \frac{1}{2} \cdot |D| \Rightarrow d_{Pr} = \frac{|D|}{d_{AB}}$



Imagens: Zapt

Equação de r

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x - (x_A - x_B)y + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Fazendo $a = y_A - y_B$, $b = x_B - x_A$ e $c = x_Ay_B - x_By_A$, vem $ax + by + c = 0$.

Cálculo de d_{AB}

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cálculo de D

$$D = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (y_A - y_B)x_P - (x_A - x_B)y_P + x_Ay_B - x_By_A \Rightarrow D = ax_P + by_P + c$$

Como $d_{Pr} = \frac{|D|}{d_{AB}}$, vem:

$$d_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A fórmula foi deduzida supondo-se $P \notin r$, mas ela é válida também no caso contrário, pois se $P \in r$, então $ax_P + by_P + c = 0$ e $d_{Pr} = 0$.

Portanto:

A distância de um ponto $P(x_P, y_P)$ a uma reta r: $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$\boxed{d_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exemplo:
A distância de $P(-2, 6)$ a r: $3x + 4y - 1 = 0$ é dada por:

$$d_{Pr} = \frac{|3(-2) + 4 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow d_{Pr} = \frac{17}{5}$$

Fonte: Smole; Diniz (2010 p. 73-74).

Contudo, essa visão é transformada no decorrer do livro, com a apresentação de exercícios resolvidos, os quais envolvem mais aspectos corporificados na construção de conhecimentos matemáticos do que abstratos, além de trazer características simbólicas.

Um fator interessante nesta introdução do conceito é a apresentação do teorema que caracteriza a distância entre dois pontos e o de distância entre ponto e reta com uma demonstração. Considerando o nível de ensino, crê-se que essas características de desenvolvimento do pensamento Axiomático-Formal podem elevar o conhecimento de um aluno que estuda por esse livro.

Referindo-se aos já-encontrados que os alunos, estudando por esse livro, necessitam para compreender a abordagem dos conceitos supra citados, destaca-se o Teorema de Pitágoras, na generalização da distância entre dois pontos. Também, os conceitos relacionados à montagem da matriz e ao cálculo de seu determinante, ambos para encontrar a equação da reta.

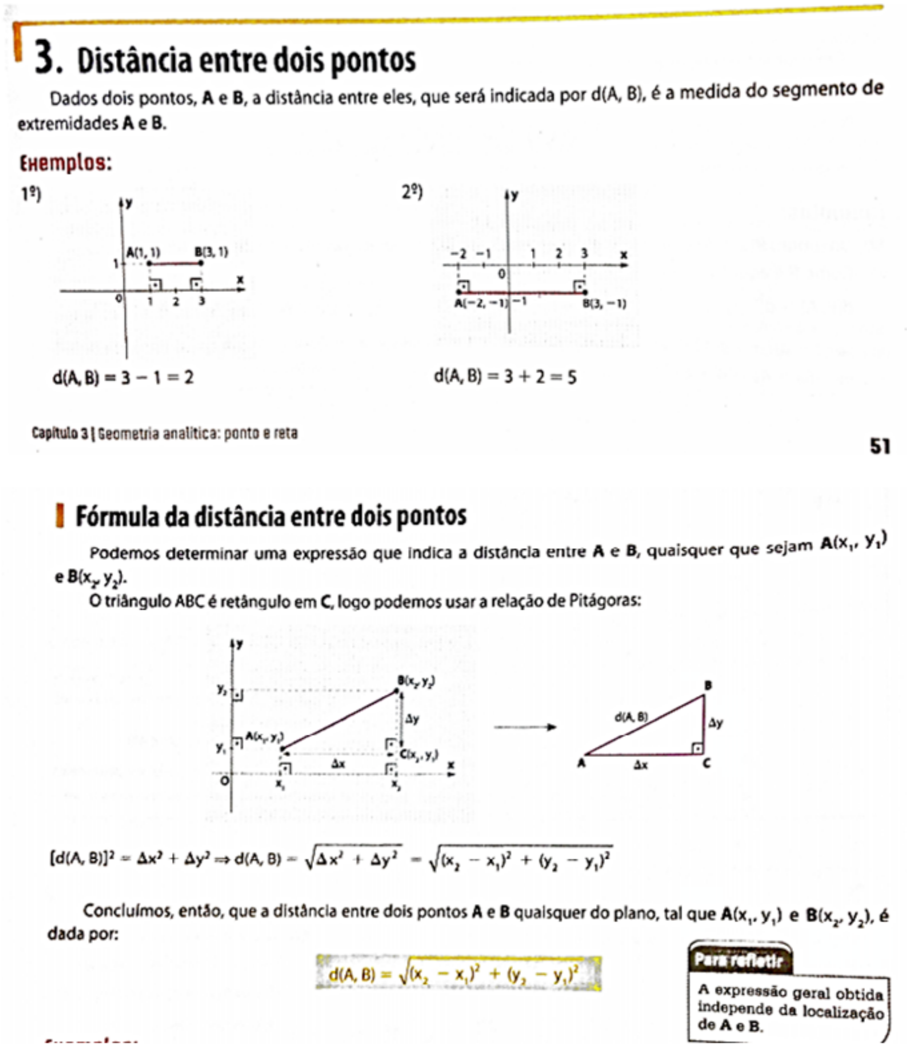
Os exercícios resolvidos, apresentados após cada introdução do conceito, desenvolvem, como dito anteriormente, características dos Mundos Corporificado e Simbólico, deixando o desenvolvimento do Mundo Axiomático-Formal para a introdução do conceito. Esses exercícios utilizam a Geometria Analítica no plano, não havendo, em nenhum momento, relação com uma visualização em três dimensões.

De maneira geral, se pode dizer que a abordagem é matematicamente bem construída, faltando algumas relações entre aspectos mais corporificados, os quais podem ser facilitadores na aprendizagem desses conceitos.

4.2 Análise do livro de Dante (2010)

Diferentemente do livro anterior, a proposta de Dante (2010) traz um trabalho prévio à construção da fórmula da distância entre dois pontos, a qual se baseia no desenvolvimento de características do Mundo Corporificado (Figura 4). Apresenta 6 exemplos em que os alunos visualizam essa distância e a calculam, intuitivamente, pela distância notada na reta numérica.

Figura 4 – Recorte da introdução ao conceito de distância entre dois pontos proposta por Dante (2010)



3. Distância entre dois pontos

Dados dois pontos, **A** e **B**, a distância entre eles, que será indicada por d(A, B), é a medida do segmento de extremidades **A** e **B**.

Exemplos:

1º) $d(A, B) = 3 - 1 = 2$

2º) $d(A, B) = 3 + 2 = 5$

Capítulo 3 | Geometria analítica: ponto e reta 51

Fórmula da distância entre dois pontos

Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre **A** e **B**, quaisquer que sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

O triângulo ABC é retângulo em **C**, logo podemos usar a relação de Pitágoras:

$$[d(A, B)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Concluímos, então, que a distância entre dois pontos **A** e **B** quaisquer do plano, tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para refletir
A expressão geral obtida independe da localização de A e B.

Fonte: Dante (2010, p. 51,53).

Pode-se dizer que essa é uma maneira mais articulada de apresentar o conceito, levando em consideração o quadro teórico base para esta pesquisa, pois, para Tall (2008), as aprendizagens formais emergem, com maior significado, ao estudante após uma apropriação de características de, pelo menos, um dos outros dois Mundos da Matemática.

Diferenciando-se do trabalho com a distância entre dois pontos, o autor não oferece nenhuma demonstração para a fórmula de distância entre ponto e reta. Ele introduz o conceito com um exemplo resolvido e, então, apresenta o que se vê na Figura 5.

Figura 5 – Introdução ao conceito de distância entre ponto e reta.

Fórmula da distância de um ponto a uma reta

Com o mesmo procedimento do exemplo anterior, para um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta **r** de equação $ax + by + c = 0$, chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da distância **d** de **P** a **r**. Veja:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para refletir

Quando temos $d = 0$?

Fonte: Dante (2010, p. 71).

Assim, um aluno que estuda por esse livro tem menos possibilidades de desenvolver características do Mundo Axiomático-Formal na aprendizagem do conceito de distância entre ponto e reta, não levando em consideração o apontado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio que sugerem evitar memorização de fórmulas.

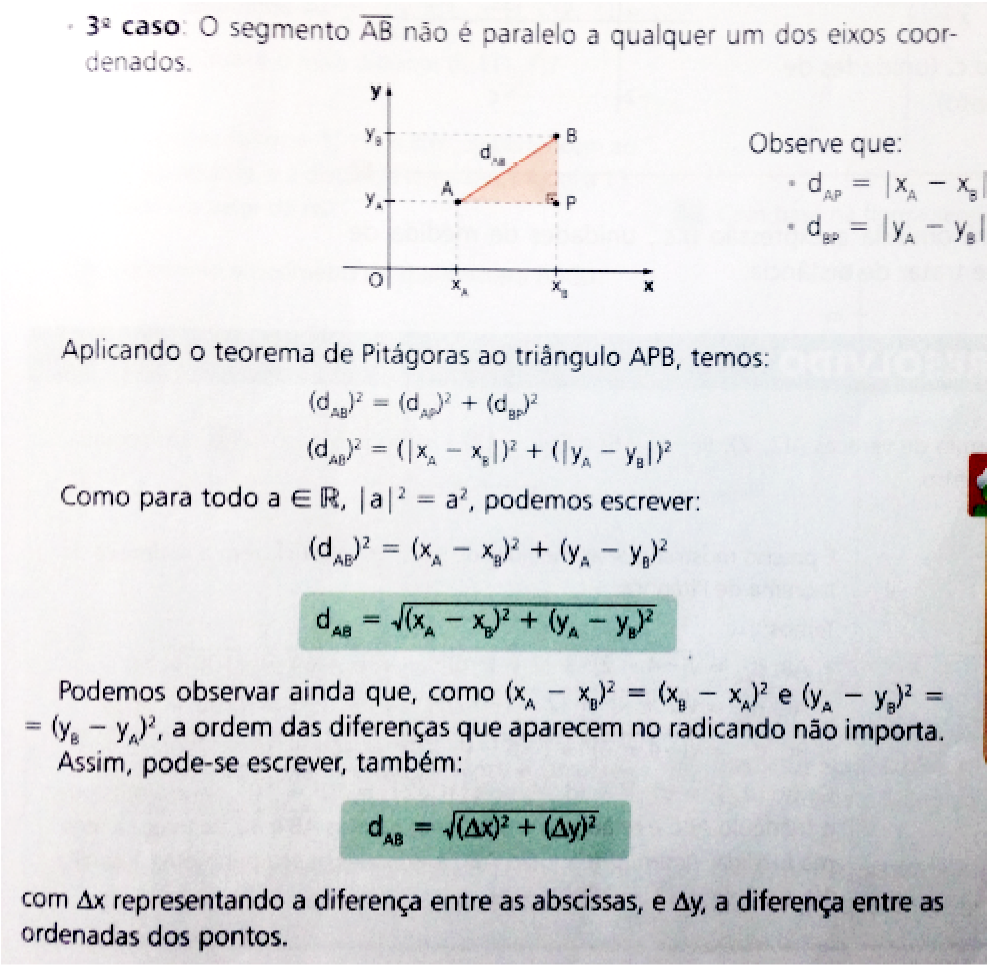
Além disso, como no livro de Smole e Diniz (2010), o autor trabalha com exercícios resolvidos no desenvolvimento dos dois conceitos. Quanto aos já-encontrados necessários para a compreensão dos dois conceitos, destaca-se, novamente, o Teorema de Pitágoras e alguns conceitos de Geometria Plana, relacionados à distância e à ortogonalidade.

Portanto, um aluno que estuda por esse livro pode desenvolver características do Mundo Corporificado e Simbólico, sendo que os enfoques mais formais são dados apenas na aprendizagem do conceito de distância entre dois pontos. Mesmo assim, não aparece qualquer menção à tridimensionalidade. Por fim, a proposta do livro integra-se melhor à Teoria dos Três Mundos da Matemática por dispor de um número maior de elementos corporificados e simbólicos prévios ao desenvolvimento de características formais.

4.3 Análise do livro de Iezzi *et al.* (2016)

O livro de Iezzi, *et al*. (2016) traz cinco exemplos para trabalho com o conceito de distância entre dois pontos. Os dois primeiros são exemplos que envolvem características dos Mundos Corporificado e Simbólico. O terceiro exemplo, visto na Figura 6, traz a dedução da fórmula, com uma escrita similar a apresentada no livro de Dante (2010).

Figura 6 – Dedução da fórmula de distância entre dois pontos em Iezzi *et al.* (2016).



• **3º caso**: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a qualquer um dos eixos coordenados.

Observe que:

• $d_{AP} = |x_A - x_B|$

• $d_{BP} = |y_A - y_B|$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, temos:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2$$

$$(d_{AB})^2 = (|x_A - x_B|)^2 + (|y_A - y_B|)^2$$

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$, podemos escrever:

$$(d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

Podemos observar ainda que, como $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa. Assim, pode-se escrever, também:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

com Δx representando a diferença entre as abscissas, e Δy, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

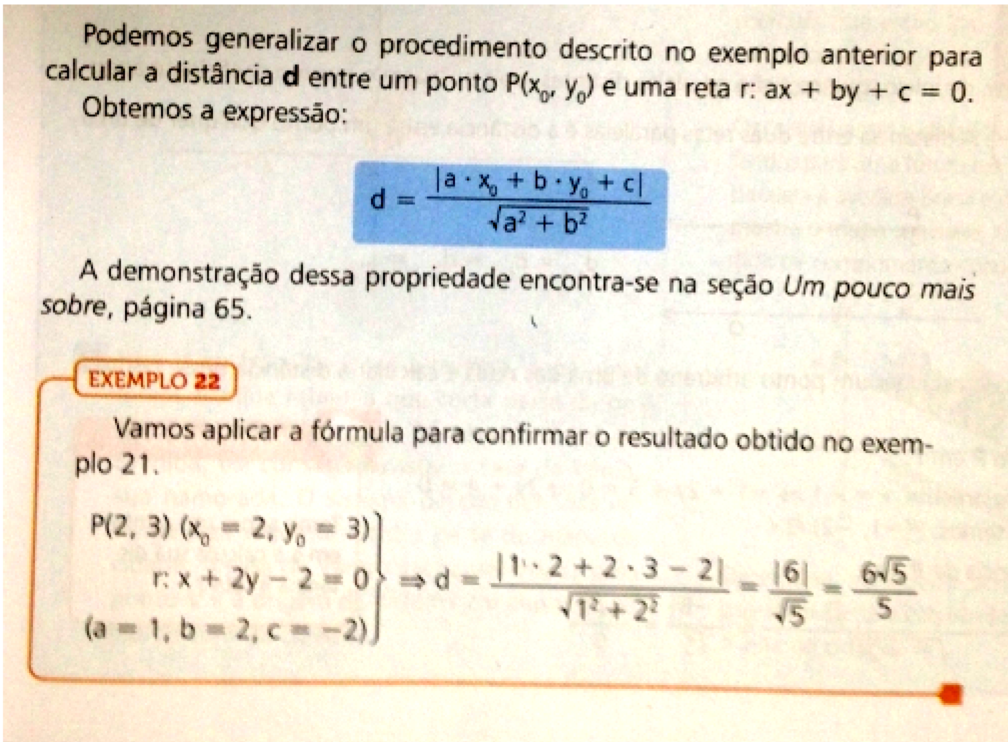
Fonte: Iezzi, *et al*. (2016, p. 11).

A dedução da fórmula traz os diferenciais apresentados também na dedução de Dante (2010). Os próximos dois exemplos resolvidos que são exibidos no livro são o cálculo da distância entre os dois pontos com uma representação gráfica do segmento que liga os pontos.

Em se tratando dos já-encontrados necessários para a compreensão desse conceito, destaca-se, novamente, o Teorema de Pitágoras e algumas questões relacionadas à Geometria Plana, como a representação de segmentos e a questão do módulo.

Já no estudo do conceito de distância entre ponto e reta, esse é desenvolvido a partir de um exemplo numérico. Os autores fazem uso da ideia da distância entre dois pontos para poder concluir esse exemplo. Após a apresentação, os autores trazem a fórmula para o cálculo já construído, sem deduzi-la nesse capítulo do texto, como pode-se visualizar na Figura 7. Algumas ideias dessa dedução são apresentadas em algumas páginas a seguir do texto, como um saiba mais.

Figura 7 – Fórmula da distância entre reta e ponto em Iezzi *et al*. (2016).



Podemos generalizar o procedimento descrito no exemplo anterior para calcular a distância **d** entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$.

Obtemos a expressão:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A demonstração dessa propriedade encontra-se na seção *Um pouco mais sobre*, página 65.

EXEMPLO 22

Vamos aplicar a fórmula para confirmar o resultado obtido no exemplo 21.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 3)\ (x_0 = 2, y_0 = 3) \\ r: x + 2y - 2 = 0 \\ (a = 1, b = 2, c = -2) \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 53).

Os próximos exemplos apresentados têm o intuito de apenas calcular a distância entre a reta e o ponto, sem trazer elementos corporificados nas construções.

Dessa forma, um estudante ao guiar-se por esse material, pode desenvolver características do Mundo Simbólico em suas aprendizagens sobre esse conceito. Em tratando-se dos já-encontrados necessários para compreender esse conceito, se destacam conceitos da Geometria Plana, como o de ortogonalidade e o de distância entre dois pontos.

4.4 Análise do livro de Winterle (2000)

O livro de Paulo Winterle, utilizado como referência básica em muitos cursos de Ensino Superior em que há a disciplina de Geometria Analítica, é o que traz menos informações ou que se preocupa menos em introduzir o conceito de distância entre dois pontos com características dos Três Mundos da Matemática, como visto na Figura 8.

Figura 8 – O conceito de distância entre dois pontos.

Distância entre dois Pontos

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, a distância d entre eles é $|\overrightarrow{P_1P_2}|$.

Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

tem-se

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Exemplo

Calcular a distância entre $P_1(2, -1, 3)$ e $P_2(1, 1, 5)$.

Fonte: Winterle (2000, p. 151).

A abordagem do autor é totalmente simbólica, apresentando, diretamente, a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos, como se pode verificar na Figura 6. Além disso, o conceito é desenvolvido, também, de maneira simbólica, através de exemplos e exercícios resolvidos em que há a necessidade de calcular a distância entre os pontos utilizando a fórmula.

No caso da distância entre ponto e reta, a abordagem remete ao Mundo Conceitual Corporificado, ao exemplificar um caso para deduzir a fórmula, conforme pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – O conceito de distância entre ponto e reta.

Distância de um Ponto a uma Reta

Dado um ponto P do espaço e uma reta r, quer-se calcular a distância d(P, r) de P a r. Consideremos na reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d(P, r) (Figura 7.1).

A área A do paralelogramo é dada por

a) $A = (\text{base})\,(\text{altura}) = |\vec{v}|\,.\,d$

ou também por

b) $A = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|$ (Capítulo 3)

Comparando a) e b), vem

$$d = d(P, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} \qquad (2)$$

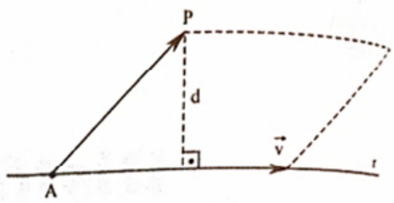


Figura 7.1

Fonte: Winterle (2000, p. 151-152).

Mesmo assim, o desenvolvimento dos dois conceitos é totalmente simbólico, não remetendo, em nenhum momento, ao Mundo Formal. Nesse sentido, ao estudar por esse livro, se desenvolvem apenas características do Mundo Simbólico, pois os alunos não interagem com a visualização que poderia desencadear características do Mundo Corporificado. Além disso, nos dois conteúdos, os estudantes necessitam do conhecimento relacionado à área do paralelogramo e do produto das distâncias.

4.4 Análise do livro de Reis e Silva (1996)

O livro de Reis e Silva (1996) traz uma particularidade que foi encontrada apenas nesse livro, ou seja, na análise feita para este artigo. Os autores apresentam duas vezes o conceito de distância entre dois pontos, para o plano e para o espaço. A Figura 10 mostra esse segundo caso, que ilustra a distância em um sistema de três coordenadas.

Figura 10 – O conceito de distância entre dois pontos.

4.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e P_0 e Q_0 suas projeções no plano xOy. Traçando por P o segmento PS paralelo a P_0Q_0, obtemos o triângulo retângulo PSQ. A hipotenusa $\overline{PQ}$ deste triângulo é dada por

$$\sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{SP}^2}. \qquad (1)$$

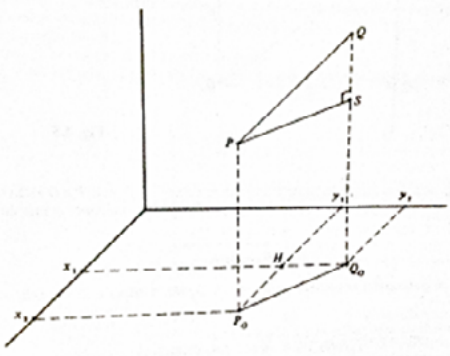


Fig. 4.6

Como o quadrilátero SQ_0P_0P é um retângulo, temos que

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 \qquad (2)$$

e que

$$\overline{SP}^2 = \overline{Q_0P_0}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (3)$$

A última igualdade foi obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo P_0HQ_0. Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Esse número, que é a medida da hipotenusa do triângulo PSQ, é chamado **distância entre** P **e** Q e indicado por $d(P, Q)$. Isto é, por definição,

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Fonte: Reis; Silva (1996, p. 94).

É interessante destacar esse fato, pois essa é uma visualização a qual não é muito trabalhada nos problemas que envolvem esse conceito e, nesse sentido, levam a imagens conceituais mais significativas e condizentes com a abstração matemática necessária para a sua construção. Aliás, essa visualização também é realizada ao desenvolver a distância de um ponto a uma reta.

Tanto no trabalho com a distância no plano, quanto no espaço, os autores trazem uma demonstração para a fórmula apresentada, além de conduzir uma atividade com características dos Mundos Simbólico e Corporificado, desenvolvendo os conceitos através de exercícios resolvidos. Dessa forma, um aluno que estuda por esse livro tem mais possibilidade de desenvolver características dos Três Mundos da Matemática, levando em consideração o apresentado.

Em se tratando dos já-encontrados necessários para aprender os conceitos apresentados pelo livro, se precisa dessa visualização, em três dimensões, dos conhecimentos das figuras planas e do Teorema de Pitágoras.

4.5 Um paralelo entre os livros analisados

Realizada a etapa de análise dos livros, é interessante discutir alguns fatores encontrados e, em especial, traçar um paralelo entre as características dos Três Mundos da Matemática presentes nos do Ensino Médio e do Ensino Superior. O Quadro 3 resume as principais características contidas em cada um dos livros em relação a alguns quesitos que foram considerados importantes nessas discussões.

Quadro 3 – Paralelo entre os livros analisados

Livro/Quesito em análise	Smole e Diniz (2010)	Dante (2010)	Iezzi et al. (2016)	Winterle (2000)	Reis e Silva (1996)
Características dos Mundos da Matemática desenvolvidas	Corporificado, simbólico e formal.	Corporificado, simbólico e formal.	Corporificado, simbólico e formal	Corporificado e simbólico.	Corporificado, simbólico e formal.
Visualização e apresentação das figuras	Estão bastante presentes em duas coordenadas.	Estão bastante presentes em duas coordenadas.	Pouco presentes, em duas coordenadas.	Pouco presentes, em duas coordenadas.	Estão bastante presentes em três coordenadas.

Já-encontrados necessários	Teorema de Pitágoras, Matrizes e Determinantes.	Teorema de Pitágoras, Conceitos da Geometria Plana.	Teorema de Pitágoras, representação de segmentos, módulo, ortogonalidade.	Cálculo de áreas e produto entre vetores.	Teorema de Pitágoras, Conceitos da Geometria Plana e cálculo de áreas.
Apresenta uma dedução para as fórmulas	Sim.	Sim, para a distância entre dois pontos.	Sim.	Não.	Sim.
Sugestões de complementação de trabalho em relação à Teoria	Apresentar mais características corporificadas.	Apresentar uma dedução para a fórmula da distância de um ponto a reta.	Apresentar mais características corporificadas.	Apresentar características dos Mundos Corporificado e Formal.	Bem adequada à Teoria, necessitando trazer mais exemplos.

Fonte: dados da pesquisa.

Percebe-se que apenas um dos livros analisados não envolve características consideradas nos Três Mundos da Matemática. Mesmo assim, há uma valorização do trabalho com as características do Mundo Simbólico, o que se esperava, levando em consideração que a maioria dos exercícios de Matemática encontrados nos livros didáticos necessita do desenvolvimento de aspectos desse mundo.

É interessante destacar que os livros do Ensino Médio trazem características as quais não são visualizadas em livros do Ensino Superior, como a dedução para as fórmulas encontradas no livro de Smole e Diniz. Esse é um tema interessante para ambos os grupos de estudantes, levando em consideração que tais conceitos, os quais Tall chama de cristalinos, seriam o ápice da aprendizagem em Matemática.

Pode-se perceber, também, uma certa semelhança entre os já-encontrados necessários para a aprendizagem dos novos conceitos, o que deixa os livros em condição de paridade nesse quesito.

Ao final do quadro, se apresenta sugestões de complementações ao trabalho do professor que utiliza esses livros em sala de aula, levando em consideração, sempre, melhorar a construção dos conhecimentos dos estudantes de ambos os níveis de ensino.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos livros didáticos possibilitou verificar quais características dos Três Mundos da Matemática, propostas por David Tall, estão mais presentes na abordagem dos conceitos de distância entre dois pontos e distância de um ponto à reta em dois níveis de ensino.

Ao observar-se essas características, se visualiza haver uma preocupação, na maioria dos livros, em apresentar características dos Três Mundos da Matemática, mesmo que de maneira superficial. Entretanto, pensando acerca do contexto de trabalho com conceitos da Geometria Analítica, se acredita ser necessário desenvolver mais a visualização, os trabalhos intuitivos com a métrica e mesmo com o conceito de distância para, depois, se elevar essas aprendizagens aos outros Mundos da Matemática.

Como citado anteriormente, a exploração de características tridimensionais só ocorre em um dos livros do Ensino Superior. Acredita-se ser possível trabalhar com essas ideias já no Ensino Médio, relacionando a Geometria Analítica com a Geometria Espacial, por exemplo.

Refletir acerca dessas questões e das propostas dos livros didáticos faz-se importante porque esses materiais são, em muitas das vezes, utilizados como referência única para as aulas de Matemática. Assim, este estudo pode contribuir para que o professor de Matemática, o qual utiliza alguma dessas bibliografias, ou mesmo outras, leve em consideração que a Teoria dos Três Mundos da Matemática é um quadro teórico. Esse tem por objeto de estudo a aprendizagem em Matemática com o olhar para o material de apoio que se utiliza no processo de ensino.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

ANGELINI, N. M. **Funções:** um estudo baseado nos três mundos da matemática. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

BRASIL. **PCNEM + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Seb, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Seb, v.2, 135p., 2006.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo**, São Paulo, v. 18, n. 3, 2006. p. 265-274.

DALLEMOLE, J.J. **Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica:** Uma experiência com o ambiente virtual Siena. 172f. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010.

DANTE, L.R. **Matemática:** contexto e aplicações. v.3. 1.ed. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações**.** 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria:** Um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. 2006. 434f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LEIVAS, J. C. P. O Ensino Atual de Geometria: Concepções e Tendências. **ACTA**

SCIENTIAE, Canoas, v. 4, n. 1, 2002. p. 43-46.

LIMA, R. N. de. **Equações algébricas no ensino médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R.N.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n.1, 2008. p. 3-18.

REIS, G.L.; SILVA, V.V. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica:** Repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SANTOS, R.S. **Tecnologias Digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica:** Manipulações no software GrafEq.136f. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SILVA, C.R. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** 253f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SOARES, G. O. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de questões envolvendo o conceito de limite. **Revista Prática Docente**, v. 4, n. 1, 2019. p. 80-95.

SOARES, G. O. **O conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática**: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática. 2018. 121f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2018.

SOARES, G. O.; CURY, H. N. Conceito de limite de uma função em livros de cálculo: uma análise a partir da Teoria dos Três Mundos da Matemática. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 7., 2017, Canoas, RS. **Anais…**Canoas: ULBRA, 2017. p. 1-18.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. **Matemática:** ensino médio. v.3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. p. 281–288.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, 2008. p. 5-24.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.