REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº 1 - jan/jun - 2017

// REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº1, Jan-Jun 2017

UEPB Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Antônio Guedes Rangel Júnior- Reitor

Prof°. Dr. Flávio Romero Guimarães- Vice-Reitor

eduepb Editora da Universidade Estadual da Paraíba

Prof°. Dr. Luciano Nascimento Silva- Diretor

Coordenação de Editoração: Arão de Azevedo Souza

Capa e Editoração Eletrônica: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Ilustração da capa: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Comercialização e Divulgação: Júlio Cézar Gonçalves Porto

Zoraide Barbosa de Oliveira Pereira

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

410

R454 Revista Educação Matemática em Foco - 2017 - Campina Grande: EDUEPB

V6 - Nº 1 - Jan/Jun. - 2017

Semestral

Editora: Kátia Maria de Medeiros

ISSN - 1981.6979

1. Formação de Professores. 2. Geometria. 3. Ensino-aprendizagem de Matemática. Pensamento geométrico 5. Interdisciplinaridade 6. Prova e demonstração em Geometria Plana. 27. ed. CDD

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - Filiada a ABEU
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br - email: eduepb@uepb.edu.br

CONCEPÇÕES DE PROVA E DE DEMONSTRAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – O CASO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA NA BEIRA E NAMPULA, MOÇAMBIQUE

Jacinto Ordem

Saddo Ag Almouloud

SUBMISSÃO: 30 de março de 2017

ACEITAÇÃO: 29 de abril de 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

CONCEPÇÕES DE PROVA E DE DEMONSTRAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – O CASO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA NA BEIRA E NAMPULA, MOÇAMBIQUE

Conceptions of proof and demonstration in mathematical education - the case of students of licensing in mathematics teaching of the Pedagogical University in Beira and Nampula, Mozambique

Prof. Dr. Jacinto Ordem
Universidade Pedagógica, Delegação da Beira
jc.ordem@gmail.com

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
saddoag@gmail.com

RESUMO

Este artigo tem como foco as noções de prova e demonstração em Geometria plana, e como objetivo analisar as concepções de prova e demonstração em Geometria plana de estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. A pesquisa envolveu alunos do 4º ano da Beira e Nampula. De natureza qualitativa, o procedimento de coleta de dados baseou-se em resolução de tarefas e entrevista e sua análise em triangulação de método. Entre os resultados obtidos destacamos: os sujeitos mostraram não saber os critérios de produção e/ou avaliação de demonstrações válidas. Evidências empíricas ou exemplos foram tomados como demonstração de propriedades gerais. Ainda alguns sujeitos apresentaram/aceitaram argumentos circulares, ou exemplos com erros conceituais como demonstração de propriedades simples, como a da soma dos ângulos de um triângulo. Do ponto de vista de conhecimentos, os resultados revelam que a Geometria plana e, em particular, as demonstrações em Geometria são um problema de ensino e de aprendizagem de alunos moçambicanos. Assim, defendermos que discussões com alunos sobre o valor de desenhos em uma demonstração, ou a estrutura de uma demonstração válida fazem-se necessárias incluindo o repensar do lugar da própria Geometria.

Palavras-chave: Concepções de prova e demonstração. Geometria plana. Tipos e esquemas de provas.

ABSTRACT

This article focuses on the notions of proof and demonstration in plane geometry and aims to analyses the concepts of proof and demonstration in plane geometry among students in Mathematics Teaching of the Mozambican students. The research involved students of the 4th year of Beira and Nampula campuses. Qualitative data collection procedures were based on questionnaires and interviews and methods of triangulation were used to analyses the data. The results of the study were: The subjects did not know the criteria for production and/or evaluation of valid demonstration; empirical evidence or examples were taken as proof of general properties. Although some subjects presented/accepted circular arguments or examples with conceptual errors as a demonstration of simple properties as the sum of the angles of a triangle. From the point of view of knowledge, the results revealed that the plane geometry and in particular, proof and demonstration in geometry are a teaching problem and learning at the Pedagogical University in Mozambique. So, to defend that discussions with students about the value of drawings in a demonstration, or the structure of a valid demonstration are necessary including to rethinking the place of plane geometry.

Keywords: Proof and demonstration concepts. Plane geometry. Types and proof schemes.

CONCEPÇÕES[1] DE PROVA E DE DEMONSTRAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – O CASO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA NA BEIRA E NAMPULA, MOÇAMBIQUE

Introdução

Neste artigo partilhamos com o leitor alguns resultados obtidos da tese de doutorado do primeiro autor, que teve como objetivo analisar concepções de prova e demonstração em Geometria plana de estudantes de Licenciatura em Ensino da Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. Tivemos como questão norteadora de estudo: "Quais concepções estudantes de Licenciatura em Matemática apresentam em situações que envolvem provas e demonstrações em Geometria plana?" No artigo, por um lado, focaremos alguns aspectos dos resultados desse estudo e, por outro, provocar uma reflexão sobre os observados nos sujeitos da pesquisa acerca do sentido da noção de demonstração.

1. Problemática, problema de pesquisa e posicionamento teórico

As noções de prova e de demonstração, apesar de não serem, em geral, objeto de ensino explícito e, portanto, serem noções paramatemáticas no sentido de Chevallard (1991), são algumas das mais importantes em toda a Matemática e em Educação Matemática. A importância dessas noções pode ser atestada a partir de algumas posições de certos autores tais como: Rav (1999) que vê as demonstrações como o coração da matemática, sendo o enunciado dos teoremas apenas sínteses de informação, manchete de notícias, dispositivos de redação; Niss (1999) que destaca que apesar da grande importância de que se revestem as demonstrações

1 Quando dizemos concepções de prova e demonstração nos referimos à pluralidade dos pontos de vista manifestados sobre as noções de prova e demonstação, bem como às estratégias mobilizadas para resolver tarefas de prova e demonstração em Geometria apresentadas [...] (ORDEM, 2015, p. 90).

para a matemática, seu ensino e sua aprendizagem são das mais difíceis em toda a educação matemática; Marrandez e Gutirréz (2000) que pontuam como um dos desafios encontrar meios adequados de ajudar os alunos a terem uma compreensão adequada sobre o que é demonstração em matemática e aprimorar as técnicas de sua produção; Goetting (1995) que defende a necessidade de deixar bem claro, desde sua formação inicial, ao professorado que generalizações baseadas em evidências empíricas não são demonstrações.

Com relação ao ensino e a aprendizagem da Geometria em escolas brasileiras, Almouloud e Mello (2000, p. 2) afirmam que embora os currículos mais recentes destaquem a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, o professor não sabe o que fazer e defendem que a formação do professor deve privilegiar práticas adequadas com as demonstrações em Geometria como meio de permitir que o aluno se aproprie dos conceitos e habilidades geométricas.

Mariotti e Balacheff (2008) destacam que ultimamente há várias contribuições em conferências internacionais, artigos publicados em revistas muito prestigiadas e dissertações de doutorado focando demonstrações. Porém, Ordem (2015), afirma que essa vivacidade que se observa em nível internacional, se contrasta com o que se passa em Moçambique, onde com a exceção da brochura "Teoremas Famosos da Geometria" dos autores Gerdes e Cherinda (1991); Gerdes (1991a, b) "Cultura e despertar do Pensamento Geométrico", "Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação", é difícil encontrar trabalhos realizados que se propõem a incentivar o estudo da Geometria entre os alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática e, muito menos, pesquisas voltadas às provas e demonstrações no contexto moçambicano. Para além do fraco incentivo que o autor afirma ter constatado, ao longo dos seus oitos anos efetivos de trabalho na Universidade Pedagógica, em alunos concluirem seus estudos com monografias que abordem Geometria plana.

Os motivos acima tecidos constituiram o argumento forte para enveredar pelo estudo das provas e demonstrações em Geometria plana tendo como sujeitos de pesquisa estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique, focando a análise de suas concepções. Assim, o estudo de que este recorte faz parte, teve como objetivo geral "analisar as concepções de prova e demonstração em Geometria plana dos estudantes de Licenciatura em Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique" e como objetivos específicos: 1 – Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de Licenciatura em Matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações. 2 – Identificar o papel que estudantes de Licenciatura em Matemática atribuem à prova e demonstração em matemática. 3 – Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em Matemática. 4 – Analisar que critérios [esses estudantes] utilizam para avaliar provas e demonstrações ou argumentos que lhes convencem de que uma propriedade em Geometria é verdadeira.

Neste artigo nosso foco é sobre os objetivos 1 e 4.

Em se tratando de um recorte de um estudo, neste artigo não apresentamos todo o referencial que norteou a pesquisa, mas apenas o que é indispensável para a compreensão das análises mais circunstanciadas trazidas neste artigo. As restantes ideias teóricas aparecerão ao longo do corpo do texto se para tal forem necessárias. Nesta parte interessam mais as ideias sobre a distinção que damos entre prova e demonstração, sobre tipos e esquemas de prova segundo Balacheff (1987), e Harel e Sowder (1998, 2007).

Utilizamos os termos prova e demonstração segundo Balacheff (1987), para o qual: **uma prova** é uma explicação aceita por uma comunidade em um dado momento. Certas explicações podem ter estatuto de prova para um grupo social, mas para outro não. **As demonstrações** são provas da comunidade dos matemáticos e, portanto, respeitam rigorosamente certos critérios. A prova apenas terá estatuto de demonstração se for uma sequência organizada de enunciados obedecendo certas regras: ou o enunciado é assumido como verdadeiro (axioma), ou é deduzido dos que lhe precedem com ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto bem

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

definido de regras.

Esse autor defende que os alunos passam por dois tipos de prova até compreenderem o sentido de demonstração: provas pragmáticas e provas intelectuais. As **provas pragmáticas** são explicações que se baseiam na manipulação de exemplos, figuras, ou observação de exemplos para a validação de propriedades; e as **provas intelectuais** são explicações baseadas em conceitos e relações entre conceitos para validação de propriedades.

Por sua vez, Harel e Sowder (1998, 2007) propõem "esquemas de prova" como meio de análise das produções dos alunos. Segundo esses autores "esquemas de prova" [dos alunos] são argumentos que os alunos utilizam para se convencer ou convencer aos colegas ou professor. Eles propõem três categorias: (i) esquemas de prova de convicção externa – forma de prova na qual tanto o que convence o proponente como o que recorre para persuadir a outros está fora do problema; (ii) esquemas de prova empírica – quando a tentativa de validação da conjectura depende de fatos físicos ou experiências manipuláveis; e, (iii) esquemas de prova analítica – quando a validação de conjecturas se baseia em argumentos abstratos e deduções lógicas.

A teoria dos paradigmas e do conceito de Espaço de Trabalho Geométrico (ETG) serviu de meio para analisar o desempenho dos alunos em relação às tarefas propostas do seguinte modo:

> (i) os conhecimentos geométricos implícita ou explicitamente manifestados pelo sujeito serão categorizados segundo o nível de apropriação desses conhecimentos – sabe bem; sabe menos e/ou não sabe – refletindo, desse modo, o ETG construído pelo sujeito.
>
> (ii) a forma de validação da propriedade geométrica: dependendo do discurso e dos artefatos mobilizados, a interpretação é segundo a ideia de paradigma geométrico, uma vez que são os paradigmas que determinam os saberes geométricos e suas formas de validação conforme a instituição. Por exemplo, em uma dada resposta analisamos o conteúdo em dois níveis: o objeto geométrico exteriorizado e a relação desse objeto com os polos teórico e empírico utilizados para a sua caracterização e/ou validação.

O conceito de espaço de trabalho fornece uma base para examinar as especificidades inerentes à atividade realizada por um praticante, em nosso caso, da Geometria, seja ele um especialista ou iniciante. (KUZNIAK, 2011)

O trabalho consiste no estabelecimento de uma relação entre objetos empíricos e objetos teóricos; é uma atividade intelectual em que o indivíduo tem certa maneira e estilo próprio de estabelecer a relação entre os dois tipos de objetos sem necessariamente levar à produção de objetos concretos. Portanto, segundo os autores, o termo “trabalho” refere-se ao estabelecimento de uma relação entre o conteúdo e a forma.

A descrição de ETG explicita quais são os objetos empíricos (por um lado, o meio físico com o conjunto de objetos concretos e tangíveis, e por outro, os artefatos tais como instrumentos de construções geométricas incluindo as próprias figuras) e quais os objetos teóricos (as definições, as propriedades, as figuras geométricas).

Houdement e Kuzniak (1998-1999, 2003, 2006) categorizam os modos geométricos de pensar chamados de paradigmas, que se caracterizam pela sua relação com a realidade e se diferenciam entre si por sua relação com a intuição, a experiência e a dedução, do seguinte modo:

- a **Geometria I** (ou Geometria natural): a fonte de validação é a realidade, o manuseável (ações e manipulação de instrumentos – régua graduada, compasso, transferidor ou outros materiais). Está intimamente ligada à realidade. Segundo os autores, o adjetivo “natural” atribuído à Geometria I não se refere à ideia de natureza em oposição à cultura, mas, ressalta a existência de uma relação forte com a realidade no processo de validação, pois, Geometria I em si é um esforço de abstração da realidade na medida em que o pensamento seleciona certos aspectos de objetos materiais traduzindo-os em padrões, tais como figuras simples (círculos, quadrados,...).

Geometria II (ou Geometria axiomática natural): nesta Geometria, a fonte de validação é baseada nas leis hipotético-dedutivas tão precisa quanto possível, contudo, o problema da escolha de axiomas surge. O vínculo com a realidade ainda existe nessa Geometria, na medida em que foi formada para organizar o conhecimento geométrico de problemas espaciais. A axiomatização é certamente uma proposta de formalização, mas não é ainda como sintaxe formal, porque não está desligada da semântica vinculada à realidade material. Daí a conservação do termo "natural" (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 181). Seus objetos são teóricos, mas as representações e modelações de objetos são reais e concretos.

Geometria III (ou Geometria axiomática formalista): essa Geometria, a qual surge como resultado da descoberta de Geometrias não euclidianas trabalha com objetos teóricos sem qualquer referência à realidade e seu sistema de validação é bastante formal. Os axiomas não se baseiam mais no manuseável, prevalece o estatuto de raciocínio lógico. O tipo de raciocínio é similar ao da Geometria II, mas o sistema de axiomas está completo e independe de suas aplicações possíveis para o mundo. Segundo os autores, "o único critério de validade é a coerência (ou seja, ausência de contradições)" (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2003, p. 4, tradução nossa). A diferença fundamental com Geometria II reside na integridade de axiomas na Geometria III, e axiomatização parcial na Geometria II.

Segundo os autores, o modelo teórico dos paradigmas geométricos assenta-se no princípio fundamental da homogeneidade entre os diferentes paradigmas, quer dizer, neste modelo, é possível ter um raciocínio dentro de um paradigma sem conhecer a natureza do outro. Alunos e professor não estão necessariamente situados em um mesmo paradigma, fato que tem sido fonte de mal entendimentos.

O **Quadro 1** é o resumo da descrição dos três paradigmas.

Quadro 1: Os aspectos que caracterizam cada paradigma geométrico

	Geometria Natural (G1)	Geometria axiomática natural (G2)	Geometria axiomática formalista (G3)
Intuição	Manuseável, ligada à percepção, enriquecida pela experiência	Ligada a figuras	Interna à Matemática
Experiência	Ligada ao espaço mensurável	Ligada a esquemas da realidade	Lógica
Dedução	Perto do real e ligada a experimentos	Demonstração com base em axiomas	Demonstração com base em um sistema completo de axiomas
Tipo de espaço	Espaço intuitivo e espaço físico	Espaço físico e espaço geométrico	Espaço euclidiano abstrato
Estatuto de figura	Objeto de estudo e de validação	Apoio de raciocínio e “Conceito figural”	Esquema de um objeto teórico, instrumento heurístico
Aspecto privilegiado	Evidência e construção	Propriedades e demonstração	Demonstração e relações entre os objetos, estrutura
Objetos	Físicos	Teóricos	
Validações	Perceptivas ou por utilização de instrumentos	Dedutivas	

Fonte: Houdement e Kuzniak (2003, p. 5, apud ORDEM, 2015, p.92)

Os autores defendem que o acesso a paradigmas geométricos far-se-á a partir de obras de matemáticos, seu estilo e passa pela resolução de certo número de problemas típicos que na terminologia de Kuhn, são designados.

Nossa pesquisa trata de concepções de alunos sobre prova e demonstração e apoiamo-nos, também, no ponto de vista de Artigue (1990), que afirma que uma concepção é um ponto de vista local sobre um dado objeto, caracterizado por:

> Situações que lhe servem de ponto de partida: situações ligadas à aparição da concepção ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado; sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas; propriedades, invariantes, técnicas de tratamento, métodos específicos (implícitos ou explícitos), (Tradução de ALMOULOUD, 2007a, p. 154)

Para esta autora, a noção de concepção satisfaz a duas necessidades diferentes:

> - pôr em evidência a pluralidade dos pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os modos de tratamento que lhes são associados, pôr em evidência sua adequação à resolução de problemas;
>
> - auxiliar o pesquisador em didática da matemática a questionar suposta clareza da comunicação didática presente nos modelos propostos de aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente

> construídos pelos alunos (ARTIGUE, 1990, p. 24, tradução nossa do artigo em Espanhol)

Portanto, a autora vê nas concepções a manifestação do conhecimento que o aluno construiu relativamente a um dado saber, e destaca que para um objeto matemático (único), o aluno pode desenvolver várias concepções e, sob o ponto de vista didático, essa distinção é importante, pois:

> a distinção que temos feito entre o objeto matemático que é único, e as concepções variadas que podem ser associadas ao objeto, nos parece importante. Ela é, dentro da investigação, uma ferramenta de análise das situações-problema a propor aos estudantes e da análise de seus procedimentos (ARTIGUE, 1990, p. 28, tradução nossa do artigo em Espanhol).

Esta afirmação nos remete, portanto, ao que a autora defendeu sempre: uma concepção é um "objeto ligado ao sujeito" e a multiplicidade de concepções possíveis não aparece como uma característica do saber, mas o faz como a multiplicidade de concepções possíveis de um mesmo objeto com o decorrer do tempo. Interessa-os, portanto, estudar a articulação concepção–situações dentro de certa aprendizagem e analisar a pluralidade dos pontos de vista manifestados sobre as noções de prova e demonstração; às estratégias mobilizadas para resolver tarefas de prova e demonstração em Geometria apresentadas nas situações explicitadas aos alunos; modo como lidam com conjecturas geométricas bem como o significado e valor que atribuem às provas e demonstrações em Geometria plana.

2. Metodologia e Procedimentos de Pesquisa

Do ponto de vista metodológico, a pesquisa é de natureza qualitativa e o processo de coleta de dados envolveu questionário e entrevistas. Participaram da pesquisa dezenove sujeitos da Universidade Pedagógica – Delegações da Beira e Nampula – sendo 8 de Nampula e 11 da Beira, todos do 4º ano do curso de Licenciatura em Ensino de Matemática. Participaram da pesquisa alunos que se disponibilizaram a fazê-lo, mas a escolha do grupo alvo foi por conveniência:

> [...] contemplamos apenas estudantes do 4º ano da Universidade Pedagógica por todos eles terem tido Geometria euclidiana plana no 2º semestre do 1º ano, [...], e sendo seu último ano de formação, podemos aferir também o conhecimento que eles desenvolveram ao longo dos quatro anos de formação sobre as provas e demonstrações em Geometria plana (ORDEM, 2015, p. 117).

A pesquisa poderia ter sido realizada em qualquer uma das delegações da Universidade Pedagógica, uma vez que os programas e conteúdo de ensino estão uniformizados desde a reforma curricular de 2009, sendo a contemplação de duas delegações consequência das possibilidades do pesquisador.

O primeiro instrumento de coleta de dados consistiu de uma sequência de tarefas que exigiam a produção e/ou avaliação de provas e demonstrações e, foi respondido em diferentes dias na presença do pesquisador. Todas as tarefas tinham a ver com a Geometria plana.

As entrevistas foram o segundo instrumento e abrangeram 14 dos 19 sujeitos que participaram efetivamente da primeira fase. As entrevistas centravam-se nas resoluções que cada participante deu no questionário e algumas perguntas gerais tais como *para si o que a noção de prova significa? E demonstração? Em sua opinião, por que acha que se ensinam provas ou demonstrações em matemática escolar?* A análise dos dados consistiu na comparação das respostas ao questionário com as das entrevistas de cada um, exceto os sujeitos não entrevistados em que as conclusões só se basearam nas respostas do questionário.

3. Alguns dados e resultados da pesquisa

Conforme dissemos no ponto anterior, os dados da pesquisa foram obtidos de dois instrumentos: questionário e entrevistas. Para cada tarefa fez-se uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori.* Neste artigo apresentamos alguns dos dados e resultados que dizem respeito a 02 tarefas escolhidas dentre um total de 15. Os dados coletados e os achados evidenciados nas tarefas escolhidas, tendo em conta

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

o espaço reservado a este artigo, parecem para nós representativos das estratégias e/ou justificativas que os estudantes investigados utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações, e tambémanalisar alguns dos critérios queesses estudantes utilizam para avaliar a validade de provas e/ou demonstrações de que que uma propriedade em GeometriaGeometria é verdadeira.

Neste artigo nosso foco é sobre os objetivos 1 e 4.

3.1. Análise da tarefa 1

A 1ª tarefa é sobre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, com dois itens. No item (a) pedia-se que os alunos apresentassem os conhecimentos a mobilizar para a validação da propriedade e no item (b) pedia-se que apresentassem uma prova dessa propriedade.

3.1.1 Análise a priori da tarefa 1

Sendo uma das atividades muito presentes em livros didáticos, portanto uma das mais básicas, começamos com esta tarefa para observarmos como é que os sujeitos da pesquisa a validam, já que constatamos em estudo anterior (ORDEM, 2010) que os livros analisados nesse estudo utilizam verificações empíricas para a sua validação.

O item a) tem como objetivo principal fazer emergir os conhecimentos ou elementos necessários que os estudantes usariam para a elaboração de uma prova ou demonstração de uma propriedade geométrica. Desse modo, esperamos que os estudantes investigados pensem na medição de ângulos do triângulo com um transferidor e façam a soma de suas medidas. Eles poderiam, a partir do resultado obtido, concluir que a propriedade é verdadeira.

Uma alternativa é construir uma reta que passa por um dos vértices do triângulo e paralela ao lado oposto desse vértice (Figura 1a). Outra alternativa é prolongar um dos lados do triângulo e, a partir do mesmo traçar uma semirreta paralela ao lado oposto (Figura 2b). Em ambos os casos o traçado da paralela a um dos lados do triângulo é sempre possível, já que o quinto Postulado de Euclides ou das paralelas garante que "por um ponto fora de uma reta, existe uma única reta paralela à reta dada".

Depois, eles podem utilizar a propriedade de ângulos alternos ou correspondentes em retas paralelas intersectadas por uma transversal para justificar os passos da prova, ou podem recorrer a instrumentos de construções geométricas para verificarem os ângulos congruentes.

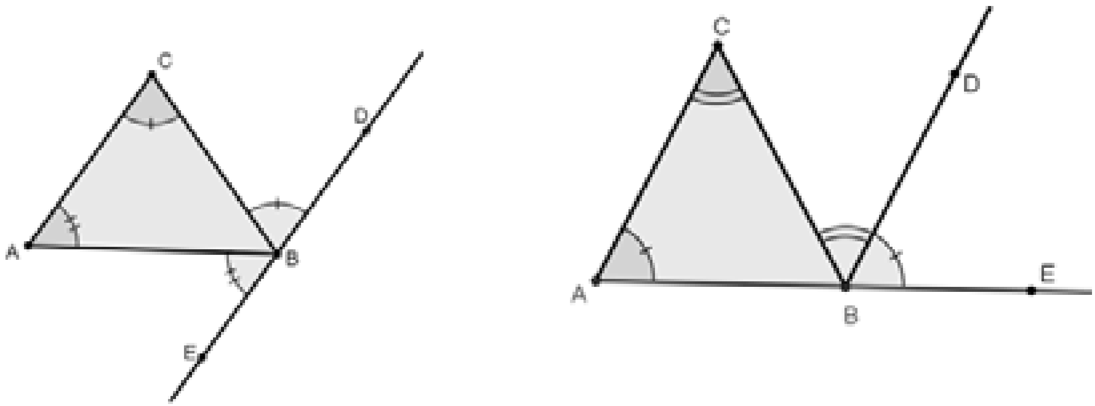
O item b tem por objetivo fazer emergir as formas que os sujeitos utilizariam para validar a propriedade. Elencamos as seguintes possibilidades:

(i) medir os ângulos do triângulo e somar suas medidas;

(ii) construir diferentes triângulos e, para cada figura medir os ângulos internos, fazer a soma das medidas obtidas e posteriormente comparar os resultados obtidos.

(iii) recorrer à representação de triângulo em cartolina, recortar dois dos seus cantos (ângulos) e posteriormente colocar os dois no terceiro ângulo obtendo um ângulo raso.

Figura 1 - Elementos gráficos dos argumentos para a validação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



a) b)

Fonte: Ordem (2015, p.122)

(iv) o aluno pode fazer apelo à Geometria Dinâmica, por exemplo, o Geogebra (um aplicativo de uso livre atualmente muito difundido), ou Cabri plus II. Usando a opção "arrastar", ele pode variar as medidas dos ângulos do triângulo e perceber que a soma das medidas desses ângulos é "sempre" 180°.

Os 4 métodos de prova apresentados, por se basearem em verificações empíricas, não explicam a propriedade: apenas dão mais suporte intuitivo de que a propriedade pode ser válida para qualquer triângulo, porém, sem garantir que não haverá um contraexemplo. São assim, provas pragmáticas, segundo a categorização de Balacheff, ou provas indutivas segundo os esquemas propostos por Harel e Sowder.

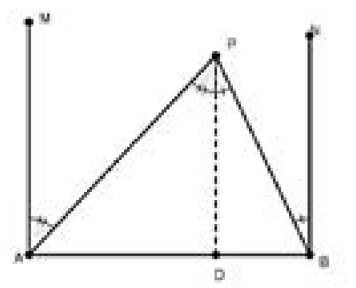
Com a exceção da prova (iv), as outras provas são presentes em livros didáticos de Moçambique (ORDEM, 2010). Esse fato nos leva a conjecturar que esses métodos de prova da propriedade em discussão fazem parte do ETG institucional das escolas de Moçambique. Quanto ao paradigma geométrico a que se enquadram essas provas, diríamos é a G1 – Geometria natural – dado que o discurso de validação não vai para além da gênese instrumental que relaciona a visualização com o polo teórico: a conjectura é apenas assumida a partir da manipulação instrumental, sem nenhum discurso teórico da Geometria que explique a tomada de decisão.

Para além dos métodos acima mencionados, vale a pena abordarmos também dois outros métodos. O primeiro desses métodos é o que Fischbein (1982, apud REID e KNIPPING, 2010, p. 40) considerou como sendo argumento para o desenvolvimento da intuição de necessidade. É o seguinte argumento: imaginemos que temos um segmento de reta AB[2]. Pelas suas extremidades, A e B, levantamos duas perpendiculares, e . Em seguida, podemos "criar" um triângulo ABP, inclinando os segmentos AM e BN em sentidos opostos. Assim, podemos observar que o ângulo APB "acumula" o que se "perde" do ângulo PAB e do ângulo PBA quando inclinamos e (Figura 12). Já que os ângulos MAB e NBA são dois retos, então podemos concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale dois ângulos

[2] Nesta tese utilizamos a seguinte simbologia: - reta AB, - Semirreta de origem A passando pelo ponto B, – segmento de reta AB ou com extremidades A e B, AB – medida do segmento de reta AB ou com extremidades A e B, ⍰ - segmento de reta AB é congruente ao segmento de reta CD, ABC ou AC – ângulo ABC com vértice em B.

retos, ou seja, 180°.

Figura 2 - Diagrama de Fischbein, 1982, (apud REID e KNIPPING, 2010)



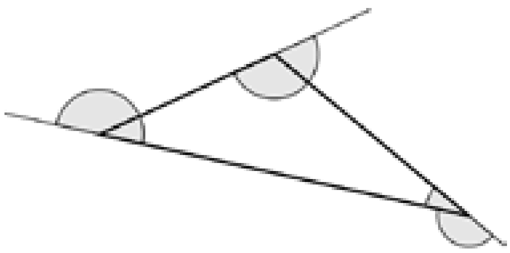
Fonte: Reid e Knipping (2010, p. 40).

A Figura 2, embora seja vista pelo autor citado como argumento para o desenvolvimento da intuição de necessidade, não conta como demonstração já que não está feita usando a linguagem matemática. Contudo, esta apresentação de um argumento, quando bem aproveitada, pode validar a propriedade sob o ponto matemático.

O segundo método do grupo adicional, é o método que Hoyles (1997) apresenta, e se expressa do seguinte modo:

Se você andar por todo o caminho em torno da borda do triângulo, você acaba tornando ao ponto em que você começou. Você deve ter dado uma volta total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo é adicionado ao ângulo interno e ambos dão 180°, porque os seus lados fazem uma linha reta. Isto perfaz um total de 540°. Então, 540° - 360° = 180°. Portanto, é verdadeiro.

Figura 3 - Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus



Fonte: Hoyles (1997, p. 12)

Com este método, embora se chegue ao resultado 180°, não garante que se consiga apresentar as razões que estão por trás do resultado. Trata-se, mais uma vez, de um método de prova que pertence à categoria de prova pragmática já que se baseia unicamente em um experimento. Dado ao fato que a conclusão se baseia na intuição apoiada em figura, então podemos concluir que se trata de uma prova na G1, Geometria natural. Quanto ao outro método imediatamente anterior a este, embora na perspectiva epistemológica de alguns autores não seja uma demonstração por não ter uma linguagem matemática justificada, entendemos tratar-se de uma verdadeira gênese de demonstração, uma vez que o discurso aí presente se justifica na base de conceitos matemáticos.

Apesar da precariedade de alguns dos métodos apresentados, são métodos de prova da propriedade que a literatura revisada mostrou fazerem parte de procedimentos de validação que alunos e professores têm recorrido, portanto, que é preciso não ignorar sua existência.

A propriedade do sistema axiomático da Geometria plana que permite justificar matematicamente a propriedade em discussão é o postulado das paralelas que garante que por um ponto fora de uma reta é possível traçar uma reta paralela a essa reta. Assim, traçando uma paralela a um dos lados pelo vértice oposto, criam-se ângulos determinados por uma transversal em duas retas paralelas. Isso permite que, em um caso, seja possível recorrer à propriedade dos ângulos alternos internos em retas paralelas para validar a propriedade (como por exemplo, os métodos 3 e 7 da tarefa 4); em outro caso, dois conceitos geométricos simultâneos, ângulos alternos e ângulos correspondentes em retas paralelas, permitem validar a propriedade (método 2 da tarefa 4). As duas formas básicas de demonstração da propriedade são realizadas a partir da Figura 1.

Por um dos vértices, por exemplo, por B, façamos passar uma reta paralela, , a um dos lados, . Neste caso a relação de ângulos alternos internos em retas paralelas (e) intersectadas por uma secante (para os ângulos C e DBC, ou para os ângulos A e EBA) serve de meio para validar a propriedade.

Em outra alternativa, prolongamos um dos lados do triângulo a partir de um dos vértices, por exemplo, B. Do mesmo vértice B, traçamos uma paralela, , ao lado oposto, . Obtemos dois tipos de ângulos (ângulos correspondentes e ângulos alternos internos) em retas paralelas intersectadas por uma secante: ângulos A e FBD (correspondentes) e ângulos C e DBC (alternos internos). Esses ângulos é que vão servir de argumentos para a validação da propriedade.

Os dois últimos métodos apresentados articulam dois tipos de elementos de natureza distinta em um discurso matematicamente coerente: por um lado, estão os elementos da natureza gráfica resultantes do uso de material de construção, por outro, estão elementos de natureza teórica para justificar a possibilidade da construção e as relações que posteriormente são criadas. Trata-se de elementos da Geometria G2 (axiomática natural) e tipo de prova intelectual segundo Balacheff ou a esquemas de prova transformacionais, segundo Harel e Sowder.

Pensamos que todos os métodos discutidos podem ser identificados em um ou outro sujeito de pesquisa como fazendo parte do seu ETG.

Resumindo, podemos afirmar que para este item **(b)** da tarefa 1, praticamente todos os métodos apresentados na tarefa 4 do presente trabalho são possíveis métodos a esperar dos nossos sujeitos de pesquisa incluindo os que descrevemos acima. Foi pensando nessa possibilidade que, primeiro, pedimos que os participantes da pesquisa nos apresentassem o seu método de validação da propriedade, e só depois pedimos que eles avaliassem os diferentes métodos de tentativas da validação da mesma propriedade. Essa ordem de apresentação foi intencional para que evitássemos uma possível influência no pensamento deles quanto à forma de validação.

3.1.2. Análise a posteriori da tarefa 1

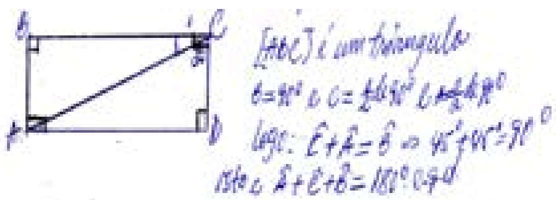
Para o item (a), entre outras, destacamos as seguintes respostas: **Tarcísio**: "[...] ter conhecimento de figuras planas, concretamente retângulo ou quadrado. [...] saber que as diagonais dessas figuras dividem o ângulo de 90° em duas partes iguais"; **Ofélia**: "[...]. Para sua validação [...] usaria o conceito de quadrado ou retângulo para fazer a respectiva demonstração"; **Kelmon**: "[...] ter conhecimentos sobre os ângulos internos de um quadrilátero, em particular o quadrado"; **Cuco, Getúlio, Herculano, Amorim, Jackson, Baú**: "[...], as propriedades dos ângulos alternos em retas paralelas, ângulos correspondentes em retas paralelas e ângulos

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

opostos" (ORDEM, 2015, p. 127-130). Nas respostas supracitadas é interessante notar a menção a figuras particulares (retângulo, quadrado) e ângulos particulares (90°) como saberes necessários para a validação de uma propriedade que envolve uma classe de polígonos – os triângulos – com a exceção da última resposta.

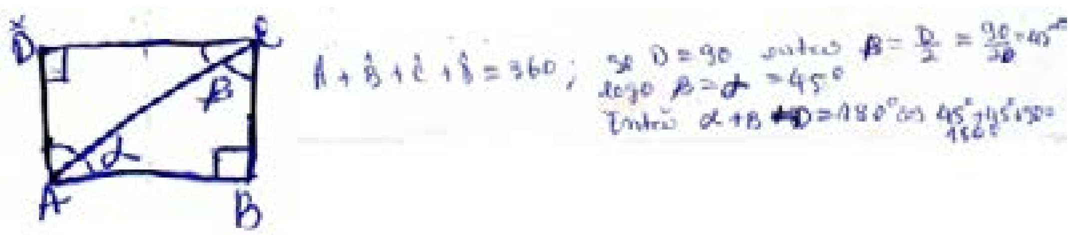
Quanto ao item (b), dez sujeitos recorreram a um quadrilátero (não necessariamente quadrado), traçaram uma das diagonais e consideraram que essa diagonal divide cada um dos dois ângulos cujo vértice é a extremidade da diagonal, em dois ângulos congruentes, como mostram as figuras 4e 5. As duas provas aqui reproduzidas recorrem a exemplos particulares para validar uma propriedade que envolve triângulos. Do ponto de vista do tipo de provas, são provas pragmáticas na sua forma mais elementar, "empirismo ingênuo". Estas provas vão ao encontro de algumas respostas dadas no item (a), particularmente as que mencionam retângulos e suas diagonais.

Figura 4: Prova apresentada por Fred



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5: Prova apresentada por Nilza

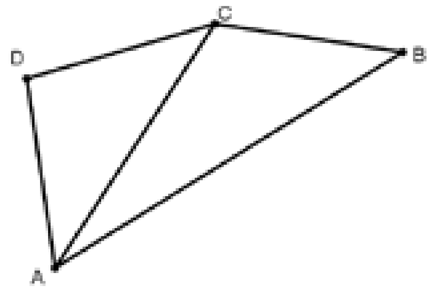


Fonte: Ordem (2015, p. 137)

Em entrevista, procuramos saber de Fred como justificava que a diagonal dividia cada ângulo em dois congruentes. **Fred** – "[...] porque é diagonal". Contudo, esta resposta contém erro conceitual, pois, dado que nem sempre todo retângulo tem todos os lados congruentes, como situar a propriedade segundo a qual "*em um triângulo de lados iguais opõem-se ângulos congruentes e vice-versa*? "

Ainda, em entrevista, perguntamos a Fred como faria a demonstração da mesma propriedade caso o quadrilátero fosse como o da figura 6:

Figura 6: Quadrilátero de contraposição ao retângulo



Fonte: Ordem (2015, p. 133)

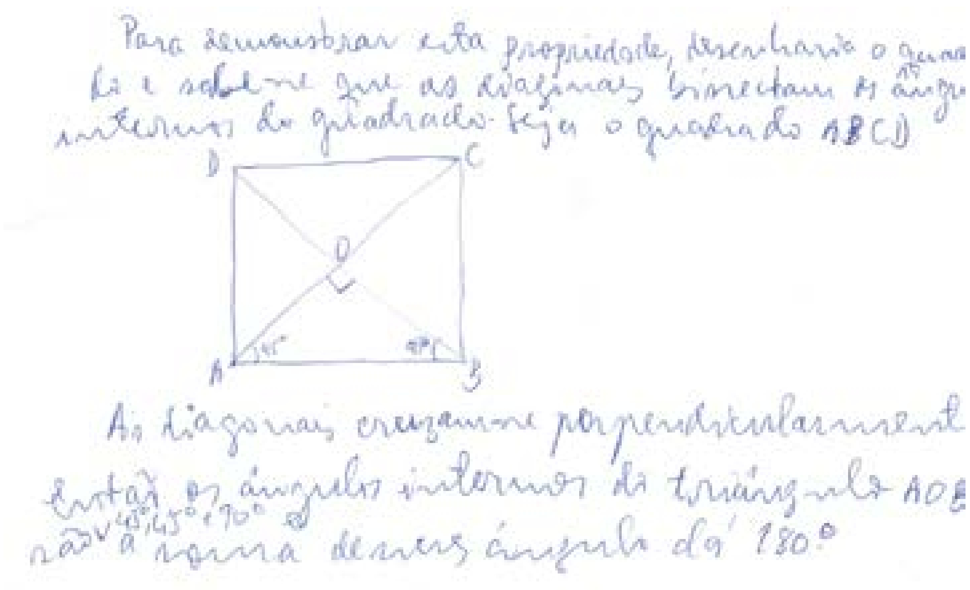
Fred: "[...] vai ser complicado. Não, não vale a pena. " **Pesquisador:** "Por quê? " **Fred:** "[...] aí eu poderia andar cegamente porque não há nada que me prove a amplitude desse ângulo. [...] porque eu só aproveitei esse porque, eu já tinha prova de certos ângulos. [...] ângulos retos e o aluno já saberia que aqui tem noventa, se corto, passo uma diagonal passa a cortar na metade daquele ângulo. Logo, já era fácil demonstrar deste triângulo, a partir desta figura".

Fred não conseguiu perceber o erro conceitual que cometeu ao pensar que a diagonal de um retângulo divide cada ângulo em dois ângulos congruentes de 45°, pois, admitir isso equivale a afirmar a existência de triângulos cujos lados diferentes se opõem a ângulos congruentes, o que contradiz uma das propriedades de triângulos que relacionam lados e ângulos.

Agora vejamos outra resolução que recorre a exemplo particular, mas não contém o erro a que fizemos alusão. Trata-se da resolução de Kelmon apresentada na figura 7.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Figura 7: Quadrilátero de contraposição ao retângulo



Fonte: Ordem (2015, p. 138)

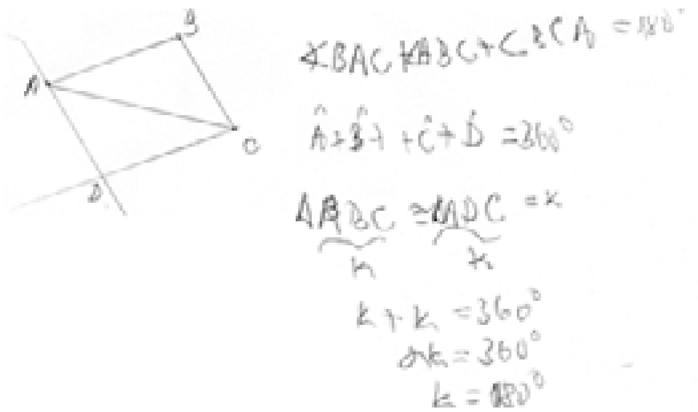
Essa resolução não deixa de ser uma prova inválida por recorrer a exemplos particulares para uma propriedade relativa a qualquer triângulo.

Na revisão de alguns livros didáticos aprovados pelo Ministério de Educação para seu uso em escolas de Moçambique, encontramos um livro da 6ª classe, de Amaral e Nhalungo (s/d, p. 132) que recorre a um quadrado como meio de explicação dessa propriedade. Esse livro pode ser uma possível fonte das ideias dos que recorreram ou pensaram no quadrado como meio de validação da propriedade em discussão. Contudo, tanto nossos alunos em formação para docência, como qualquer um que venha usar aquele livro deveria saber que a prova não é válida por recorrer a exemplo particular para uma propriedade geral.

Questionamos também a Kelmon sobre como agiria no caso de querer demonstrar a propriedade não partindo de um quadrado, mas de um triângulo qualquer. **Kelmon**: "[...], se eu traço este triângulo ABC, então, ..., se eu traço ... tenho de produzir um paralelogramo" (Ordem, 2015, p. 139). Depois de obter um paralelogramo, Kelmon afirma que não só de quadrado se deduz essa propriedade, como de outros quadriláteros.

Pesquisador – "Mas a ideia é você mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos é 180°". **Kelmon** – "[...], este triângulo ABC é congruente, significa que tem a mesma medida. Então se é congruente eu posso dizer não é, [...], posso designar por uma letra qualquer. Se eu disse que este é igual a este posso dizer é uma capa (k), [...]. Então se eu disse que se os dois triângulos formam quadrilátero, este triângulo mais o outro vão formar aquele quadrilátero cuja medida é 360 graus. Então, simplesmente, dois capas (2k) igual a 360 graus, onde capa vai ser 180 graus. Pelo menos eu já tenho garantia que estes são congruentes. Então, assim cada um deles vai medir 180 graus", (ORDEM, 2015, p. 138). Na figura 8 apresentamos os procedimentos de Kelmon.

Figura 8: Desenho e prova de Kelmon



Fonte: O autor (Adaptação de Ordem, 2015, p. 139, 141)

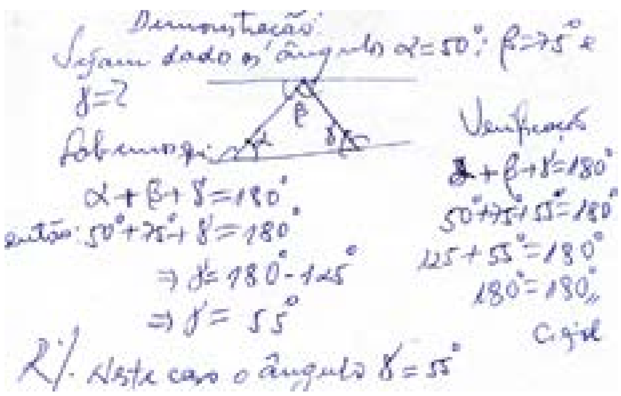
Na figura 5, vemos que Kelmon primeiro toma a conclusão a demonstrar como argumento da prova e, posteriormente, transforma-a em tese (conclusão). Esse procedimento torna os argumentos circulares uma vez que o objeto de validação é utilizado como argumento antes do seu estabelecimento, consequentemente, a rigor, não chega a estabelecer a conclusão pretendida. Portanto, a prova é inválida por conter argumento circular. Ofélia teve a mesma ideia só que não exploramos a fundo na entrevista.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Constatamos também que 3 sujeitos recorreram ao método de recorte e dobradura, 6 escolheram arbitrariamente dois valores concretos para medida de dois dos três ângulos. Esse último procedimento é ilustrado na figura 9. Para esse grupo, exercícios de fixação do conteúdo de uma propriedade é sinônimo de demonstração dessa propriedade.

Como vemos, César confunde exercícios de fixação do conteúdo da propriedade, com a prova dessa propriedade.

Figura 9: Prova de César



Fonte: Ordem (2015, p. 149)

Resumindo: como vemos, apesar da propriedade da soma dos ângulos de um triângulo ser básica, uma vez que é explorada desde o 3º Ciclo do Ensino Básico (Ordem, 2015, p. 38), sua validação não é de domínio de muitos dos sujeitos de nossa pesquisa.

A seguir passamos a apresentar os resultados da tarefa 4. Essa tarefa pedia para avaliar 9 métodos diferentes de tentativa de validação da mesma propriedade da soma dos ângulos de um triângulo. Entre as provas, duas tinham argumentos baseados em propriedades matematicamente justificadas (métodos 2 e 3); uma recorria à medição e soma das medidas obtidas (método 1); duas recorriam ao recorte e dobradura (métodos 5 e 6); outra recorria ao GeoGebra (método 4), entre outros argumentos. O pedido era avaliar se cada uma delas mostrava ou não que a afirmação é verdadeira para todos os triângulos, justificando a resposta.

Apenas um sujeito da pesquisa (Dionísio) rejeitou todas as provas baseadas em verificações empíricas -1, 4, 5, 6, 8 e 9. Os restantes 18 sujeitos apontaram pelo menos uma prova pragmática como demonstração da propriedade.

Em entrevista procuramos saber que critério teriam utilizado para aceitar ou rejeitar determinado método. Vejamos algumas respostas:

Kelmon - "Na verdade foi difícil avaliar, foi difícil porque parecia tudo estar certo, e, portanto, foi difícil [...], eu usava mais [...] que o aluno dizia e a figura que estava lá. [...].

" **Pesquisador:** "[...], não é porque foi consistente?

" **Kelmon:** "Muito consistente não se conta. Sinceramente falando [...]. Acho que não serei capaz de satisfazer, porque escolhi, aceitei, porque não aceitei. " (Ordem, 2015, p. 222). Portanto, como se vê, Kelmon não utilizou nenhum critério matemático para aceitar ou rejeitar determinado método. Vejamos outras respostas.

Herculano: "[...], o método 6 é mais claro. Aqui se usa aquela técnica de recorte, não é, então aqui recortando os ângulos do triângulo e colocando duma maneira que se encaixem dá para ver que a soma, que os três ângulos formam um único de 180. [...] é já fácil provar que de fato a soma dos três ângulos é igual a 180°. [...], no método 1, *aqui diz: medir com transferidor. Então, acho que com esse método o estudante, o aluno fica dependente do transferidor. <u>Se não tiver transferidor não vai conseguir provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°</u>. [...] Então, neste segundo, neste segundo eu achei também pertinente porque aqui [..] recorre-se a uma reta auxiliar, aplica-se a propriedade dos ângulos alternos formados em [...], em duas paralelas por uma reta transversal; o método 3 também usa a mesma propriedade e também pode-se usar para provar a proposição. O método 4 pode ser usado para demonstrar,* só que é um método limitado depende já das condições que nós temos. Por mim, eu poderia usar este método na sala de aulas temos condições para tal (ORDEM, p. 223, grifo do autor).

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Os métodos 1, 4, 6 por se basearem em manipulações de objetos empíricos, não permitem demonstrar a propriedade, porém, para Herculano dois deles validam (4 e 6), enquanto outro não (1). A aceitação ou a rejeição baseou-se, não na riqueza conceitual, mas sim, na praticidade do instrumento utilizado. Quer dizer, nosso interlocutor está mostrando também que a avaliação dos métodos não se baseou em nenhum critério matemático. Vejamos outra resposta que obtivemos de outro sujeito, o Fred: "Iya, eu poderia destacar método 3, [...], eu achei mais prático. [...], tem a presença de paralelismo, [...] método 2 também pode validar porque este é prático e no ensino secundário é usado este para demonstrar [...]" (ORDEM, 2015, p. 220). Fred parece aceitar o método 2 não por sua riqueza conceitual, mas porque reconheceu seu uso no ensino secundário. Quer dizer, do ponto de vista das classificações das provas, Fred manifestou o esquema de prova de convicção externa, uma vez que o reconhecimento da presença do método nos materiais de ensino secundário, parece ter sido o critério utilizado por ele para aceitá-lo, o que, em termos de conhecimentos, revela lacunas sobre quais as condições de uma prova (demonstração) válida. Tanto o que constatamos nestes extratos das entrevistas, como o que dissemos sobre o número de sujeitos que aceitaram alguma explicação baseada em verificação particular no questionário, podem revelar que nossos sujeitos não sabem as condições de uma demonstração válida.

3.2. Análise da tarefa 2

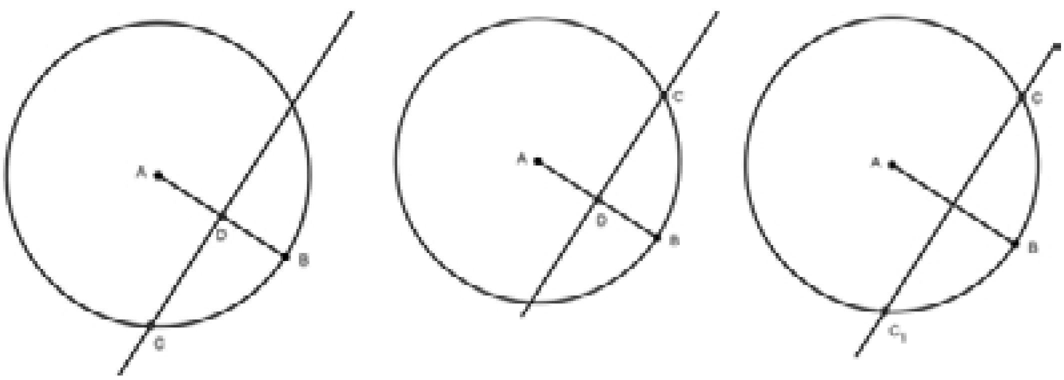
Agora passamos a apresentar as respostas relativas à tarefa 2 (que é a tarefa 9, proposta em Ordem (2015)). Essa tarefa tinha a seguinte formulação: "A é o centro de um círculo e AB é o raio. C representa um ponto na circunferência por onde a mediatriz de AB atravessa a circunferência. Provar se é verdadeiro ou falso que o triângulo ABC é sempre equilátero".

3.2.1. Análise a priori da tarefa 2

A tarefa tem por objetivo estudar as estratégias que os sujeitos da pesquisa utilizariam para verificar a conjectura. Os conhecimentos a serem mobilizados para a execução desta tarefa são basicamente as propriedades da mediatriz de um segmento e a congruência de triângulos.

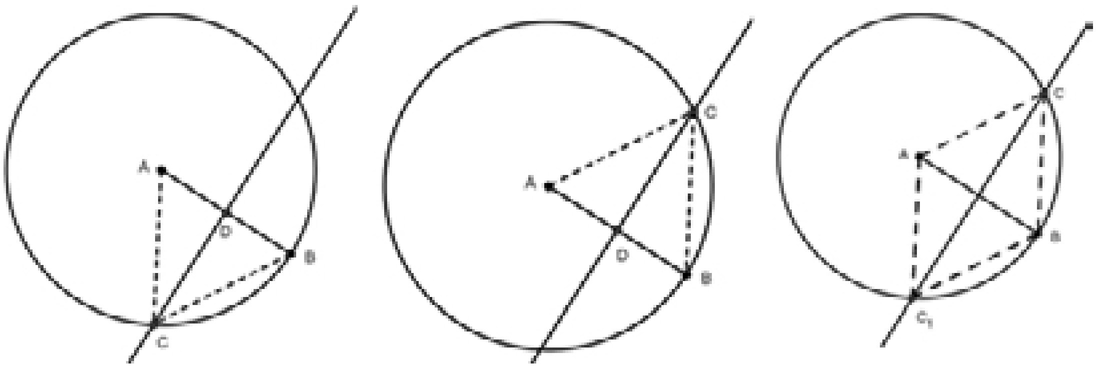
O primeiro passo exige a manipulação de instrumentos clássicos de desenho, régua e compasso, para o traçado da circunferência, de raio AB e de sua mediatriz segundo a descrição fornecida – trata-se da fase em que os instrumentos de construções geométricas servirão de elemento de mediação entre o objeto da tarefa e o sujeito, fase em que o sujeito vai mostrar se sabe ou não o que é mediatriz de um segmento de reta e como se traça por meio de instrumentos clássicos de desenho. É o momento em que se põem ações norteadas por GI. Espera-se que nesta fase configurações como as que se apresentam nas Figuras 10 e 11 sejam feitas.

Figura 10: Conversão ao registro figural da tarefa 2



Fonte: O pesquisador

Figura 11 - Acréscimo de elemento para a obtenção de um triângulo



Fonte: O pesquisador

Já o passo seguinte incide sobre a validação da conjectura. Nesta fase há duas alternativas: na primeira alternativa coloca-se em jogo ações indicativas da Geometria natural (GI), e na segunda, foca-se em procedimentos da Geometria axiomática natural (GII). No primeiro caso, as configurações obtidas servirão de objeto de validação da conjectura mediante o uso de medições ou outras ações como a sobreposição ou superposição para chegar à conclusão. A medição pode envolver um ou vários casos. O tipo de prova será pragmático ou indutivo.

Na GII, as configurações servirão de apoio ao raciocínio baseado em regras axiomáticas. O raciocínio pode ser similar ao apresentado por Ernesto e Moisés, juntamente com a ideia de que raios de uma mesma circunferência têm medidas iguais. A cadeia dedutiva desse gênero leva à conclusão de que o triângulo ABC é sempre equilátero, pois:

1. Sendo CD ou CC_1 mediatriz do segmento AB, então AD = BD e as retas CD e AB (CC1 e AB) são perpendiculares.

2. CD = CD, por ser lado comum;

Então, pelo critério LAL, ΔADC □ ΔBDC.

Portanto, AC = BC, porque são lados homólogos de triângulos congruentes. Mas: AC = AB, porque são raios de uma mesma circunferência.

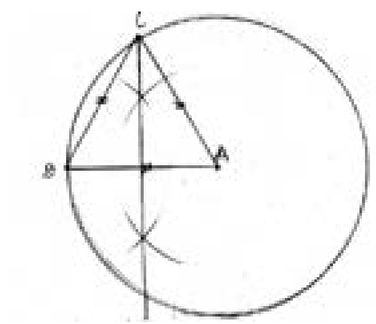
Logo, AB = BC, ou seja, AB = AC =BC, que é o mesmo que dizer de que o triângulo ABC é equilátero. Portanto, a afirmação é sempre verdadeira.

Ainda podemos considerar a possibilidade de o sujeito tentar construir um raciocínio discursivo que aparenta uma prova correta, enquanto contém um erro lógico na apresentação da prova.

3.2.2. Análise a posteriori da tarefa 2

Como já destacamos, nosso objetivo era estudar as estratégias que os sujeitos utilizariam para validar ou refutar a conjectura. Dado que para levantar a conjectura era necessário fazer alguma construção com régua e compasso, constatamos que entre os dezoitos sujeitos envolvidos na tarefa, catorze conseguiram construir desenho segundo as descrições dadas. Contudo, na validação, apenas quatro sujeitos recorreram a argumentos matematicamente válidos para justificá-los. Neste artigo apresentamos duas produções que se basearam apenas no desenho como meio de prova e discutimos a sua validade. Trata-se das provas de Elísio (figura 12) e de Jackson (figura 13).

Figura 12: Produção de Elísio



ABC é um triângulo. Pela figura prova tudo que ABC é sempre equilátero, porque da figura adquirida temos o seguinte:

B = A = C = 60° - ângulos

⍰ ⍰ - lados do triângulo

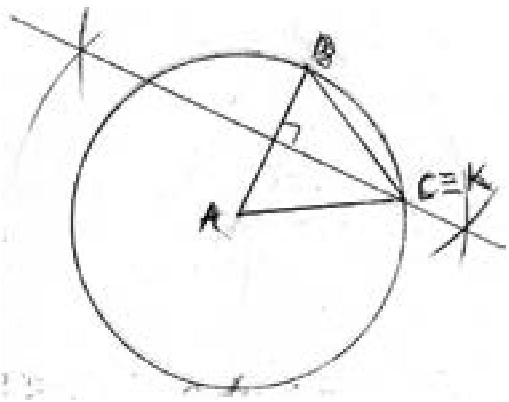
A + B + C = 180°

Já se sabe que: se o triângulo for equilátero, então a soma das medidas dos ângulos internos também será igual a 180°

Fonte: Ordem (2015, p. 272)

Ao afirmar que a figura prova tudo, nós interpretamos que Elísio está dizendo que os argumentos da prova devem ser buscados no desenho. Contudo, como destaca Fetissov (1994, p. 28) o desenho é somente um meio de apoio para a demonstração, "um caso particular de toda a classe das figuras geométricas, objeto da demonstração considerada", pelo que é fundamental "separar no desenho dado as propriedades gerais e pertinentes daquelas particulares e casuais" (ibid.) e isso, não é descodificável sem legenda no desenho, porque, como defende Duval (2004), em Geometria não se pode falar de figura sem legenda. Por sua vez, Jackson fez o seguinte:

Figura 13: Produção de Jackson



"1º Traçando a mediatriz de AB, com: abertura de compasso de medida AB a partir dos extremos A e B, logo os arcos cruzam-se num ponto K mas AK = BK = AB e AC = AB, porque são raios da circunferência, logo já que AC = AB e AB = AK □ (K coincide com C) consequentemente □ □ □ □ □ (Triângulo equilátero) c.q.d".

Fonte: Ordem (2015, p. 273-274)

Jackson baseia-se apenas nos resultados da construção para estabelecer a relação entre AK e BK e, aproveitando-se da relação entre AC e AB (bem fundamentada), por transitividade da relação de igualdade, conclue que ABC é um triângulo equilátero. Em sua prova há uma ruptura – ele não chega a explicar matematicamente porque AK = BK, passo fundamental para se poder aceitar ou não a validade da prova. Portanto, tanto Jackson como Elísio se basearam nos resultados de suas construções com régua e compasso para tirar as conclusões, sem se preocuparem com algum modelo teórico que justifique essas conclusões.

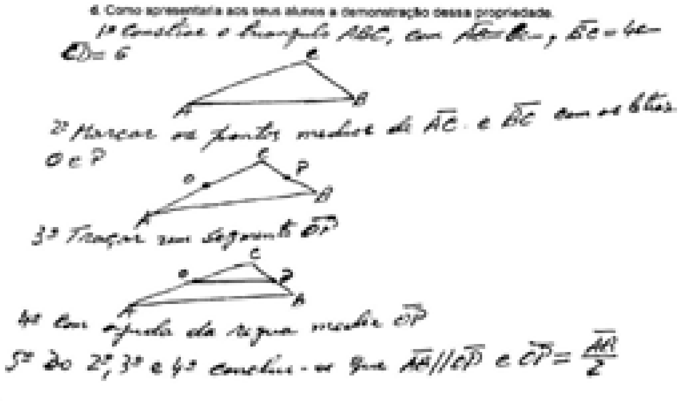
Contudo, segundo Chácon e Kuzniak (2011) e nós concordamos, em Geometria, régua graduada ou não, e precisão na construção, tampouco importam; apenas a justificação que estabelece a relação entre o polo empírico (instrumento de construção e o desenho) com o polo teórico (definições, propriedades, figuras geométricas) é que conta. Quer dizer, em Geometria, a essência das demonstrações reside exatamente no estabelecimento de uma relação fundamentada entre o resultado da construção (desenho) e as propriedades gerais.

Para a tarefa em discussão, justificar que o segmento BC, que não une o centro do círculo – A – também tem medida de raio da circunferência, tal como o são os segmentos AC e AB, é indispensável para se concluir que o triângulo ABC, nas condições dadas, é equilátero. Não só, como destacam Dorier, Gutiérrez e Strässer (2003) nenhuma propriedade geométrica é visível em uma figura, ela sempre tem de ser dada na hipótese, codificada ou estabelecida por deduções. Ao utilizarem desenhos como meio de validação da propriedade, Elísio e Jackson consideraram as evidências empíricas como argumentos da prova, o que matematicamente é inaceitável.

Um exemplo bastante flagrante que ilustra o desconhecimento de como funcionam os princípios de uma demonstração em Matemática, vem de uma resolução de um dos sujeitos da pesquisa – Tarcísio – alusiva a tarefas de pesquisa (tarefa 2, item d): nessa tarefa, pedia-se que os sujeitos demonstrassem que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo e, sua medida é metade da medida desse terceiro lado.

Tarcísio apresentou a prova que reproduzimos na figura 14:

Figura 14: Prova apresentada por Tarcísio

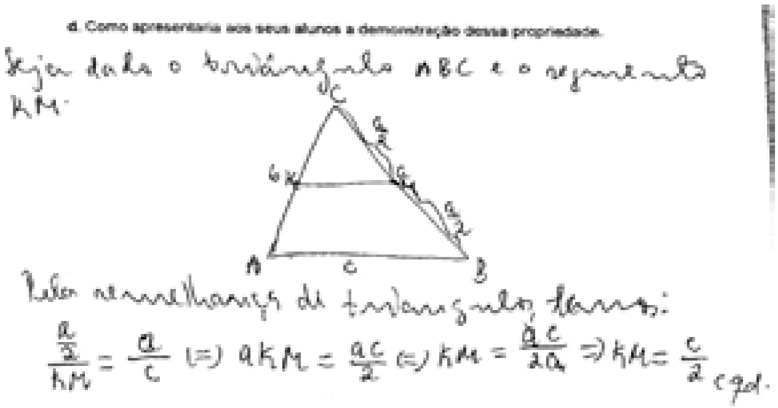


Fonte: Ordem (2015, p. 177)

Como vemos Tarcísio tira suas conclusões baseando-se unicamente no desenho e medições com régua. Ao basear-se somente nos desenhos e medições, sem se preocupar com algum discurso teórico para fundamentar suas conclusões, nosso interlocutor parece desconhecer por completo os modelos teóricos em que se devem assentar as conclusões em Matemática em geral, e as conclusões geométricas, em particular.

Outra resolução é a de sujeitos que assumem a tese a demonstrar como fato estabelecido, isto é, como hipótese do problema. A título ilustrativo apresentamos na figura 15 a resolução de Kelmon.

Figura 15: Prova de Kelmon



Fonte: Ordem (2015, p. 175)

Como destacamos na análise desta resolução, ao considerar que os triângulos ABC e KMC são semelhantes, Kelmon está afirmando que os lados e (os lados homólogos dos dois triângulos) são paralelos, uma vez que o triângulo KMC é parte do triângulo ABC. Contudo, era exatamente a relação de paralelismo entre e que devia ser estabelecida recorrendo a argumentos matematicamente fundamentados. Para além disso, Kelmon não conseguiu demonstrar que é metade do segmento AB, mas força essa relação. Portanto, toda a prova de Kelmon é inválida.

Todos os extratos trazidos neste artigo visam basicamente ilustrar um aspecto que foi bastante notório entre os sujeitos que participaram da pesquisa: conhecimento matemático bastante limitado da noção de demonstração em Geometria. Fazendo um cruzamento desses achados nos sobressaem ideias de alguns autores com as quais nos identificamos: Martin e Harel (1989) que destacam que se professores levam seus alunos a acreditarem que exemplos bem escolhidos constituem demonstração, então é natural que a noção de demonstração em Geometria [cuja visualização é um dos pressupostos essenciais] pode ser difícil nos diferentes segmentos de ensino; Gutiérrez e Jaime (1999), que apontam o conhecimento matemático limitado dos futuros professores como um dos grandes entraves para a sua formação didática e pedagógica. As duas ideias se encaixam bem nos nossos sujeitos e isto constitui, para nossa parte, um motivo deveras preocupante.

Não porque as verificações empíricas sejam na sua totalidade inúteis em processos de ensino e aprendizagem, como apontam Harel e Sowder (1998), pois exemplos e contra-exemplos tornam as conjecturas mais intrigantes para a busca de uma explicação matemática – demonstração – o problema é preocupante quando uma demonstração é esperada, mas aos olhos do aluno, uma verificação particular é suficiente para explicar uma propriedade válida para uma classe de objetos matemáticos, tal como constatamos com as prova de Tarcísio, Elísio ou Jackson, por exemplo.

4. Conclusões e considerações finais

Neste artigo nosso foco foi para a análise e interpretação de algumas produções de parte de nossos alunos da Universidade Pedagógica que estavam cursando a Licenciatura em Ensino de Matemática. Os dados apresentados mostram um lado sombrio do estado da aprendizagem das demonstrações em Geometria: os sujeitos mostraram não saber os critérios de produção de demonstrações válidas - evidências empíricas, exemplos particulares, ou simples construções e medições com régua e compasso foram tomados como demonstração de propriedades gerais.

Os extratos apresentados ilustram explicitamente a concepção de que evidências empíricas são vistas por esses estudantes da Universidade Pedagógica como uma demonstração, concepção essa que se desvia do sentido matemático de demonstração. Outros sujeitos apresentaram exemplos com erros conceituais como demonstração de propriedades bastante simples. Ainda constatamos que exercícios de fixação de algumas propriedades são encarados por nossos futuros professores de matemática escolar como prova dessas proposições.

Do ponto de vista de conhecimentos, os resultados revelam que as provas e demonstrações em Geometria plana constituem um problema de ensino e de aprendizagem na nossa instituição de formação de professores: noções tais como as de demonstração e propriedades geométricas não são do domínio desses sujeitos. Por isso, defendemos que a disciplina de Geometria Euclidiana Plana, no lugar de se supor que é de revisão, ela deve ser tratada com outro olhar: é uma disciplina que levanta sérios problemas de ensino e de aprendizagem. Por isso, defendemos um repensar no tempo alocado a essa disciplina. De contrário, a ideia vamos continuando a tirar professores não preparados para o ensino dessa disciplina. Embora o desenvolvimento profissional docente não seja um processo acabado a partir da formação inicial, defendemos que uma mudança de visão se faz necessária desde a formação inicial sobre as demonstrações em Geometria.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos. In: *REUNIÃO ANUAL DE ANPED*, 24: Caxambu, 2000.

AMARAL, A. J.; NHALUNGO, C. *Livro do aluno – 6ª classe – Matemática: as maravilhas da matemática – 6ª classe*. Maputo, Editora: Plural Editores, Porto Editora (s/d).

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. Recherches em didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée sauvage-Éditions, vol. 10-2.3, p. 241-286, 1990.

BALACHEFF, N. *Processus de prevuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, vol. 18, p. 147-176, 1987.

CHACON, I. Mª. G., KUZNIAK, A. Les espaces de travail géométrique de futurs professeurs em contexte de connaissances. *Annales de didactique e de sciences cognitives.* IREM de Strasbour, p. 187-216, 2011.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. For the learning of mathematics, vol. 17, n. 1, p. 7-16, 1997.

DORIER, J.; GUTIÉRREZ, A.; STRÄSSER, R. Introduction to Thematic Working Group 7. In: Mariotti, M. A. et al. European Research in Mathematics Education III: *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italia. Pisa (Italia): Università di Pisa, 2003. Disponível em: <http://archive-ouvert.unige.ch/unige:16876>. Acesso em 04/05/2015.

DUVAL, R. *Semiosis y Pensamient Humano: Registros Semióticos e Aprendizjes Intelectuais.* Universidad Del Valle, 2004.

_____. Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals. Berna: Peter Lang, 1995.

FETISSOV, I. *A demonstração em Geometria*. Tradução HyginoH.Domingues. São Paulo: Atual, 1994. (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

GERDES, P., CHERINDA, M. *Teoremas Famosos da Geometria.* Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GERDES, P. *Cultura e o despertar do Pensamento Geométrico*. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991a.

_____. *Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação.* Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991b. (Colectânea de textos).

GOETTING, M. M. *The college students' understanding of mathematical proof*. Doctoral dissertation, University of Maryland, Faculty of the Graduate School, College Park, 1995.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. *Preservice primary teachers' understanding of altitude of triangle*. Journal of Mathematics Teacher Education 2: 253-275, 1999. Disponível em

<http://www.sprinerlink.com/content/p74436443680199/fulltex.pd>. Acesso em 22 de março de 2012.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: results from exploratory studies. In: Alan H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsk (Eds.), *Research in College Mathematics Education III, pp.* 234-283, 1998.

HAREL, G.; SOWDER, L. Toward comprehensive on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning.* National Council of Teachers of mathematics, 2007.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. Elementary geometry split into different geometrical paradgms. In: *Proceedings of European Research in Mathematics Education III. Working Group 7*, 2003. Disponível em:

<http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_houdement_cerme3.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2011.

_____. Paradigmes Géométriques et enseingnement de la géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, volume 11, p. 175-193, 2006.

_____. Paradigmes Geometriques. Petit x, n. 5, p. 5-21, 1998-1999.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. For the learning of mathematics, vol. 17, n. 1, p. 7-16, 1997.

KUZNIAK, A. L'Espace de Travail Mathématique et sés gêneses. Annals de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 16, p. 9-24. IREM de STRASBURG, 2011.

MARIOTTI, M. A. ; BALACHEFF, N. *Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof*. ZDM Mathematics Education, n. 40, p. 341-344, 2008.

MARTIN, W. G.- HAREL, G. *Proof Frames of Teachers Elementary Teachers*. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, n. 1, p. 41'51, 1989.

MARRANDEZ, R.; GUTIÉRREZ, A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, N. 44, p. 87-125, 2000.

NISS, M. *Aspects of the Nature and the State of Research in Mathematics Education.* Educational Studies in Mathematics, n. 40, pp. 1-24, 1999.

ORDEM, J. *Prova e demonstração em Geometria plana: concepções de estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, 2015.

RAV, Y. *Why do We Prove Theorems?* Philosophia Mathematica, n. 3, vol. 7, pp. 5-41, 1999.

REID, D. A; KNIPPING, C. Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Canada, 2010.