



V6 - Nº 1 - jan/jun - 2017



REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº1, Jan-Jun 2017

Copyright © 2017 EDUEPB

A reprodução não-autorizada desta publicação, por qualquer meio, seja total ou parcial, constitui violação da Lei nº 9.610/98. A EDUEPB segue o acordo ortográfico da Língua Portuguesa de 1990, em vigor no Brasil, desde 2009.



UEPB Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Antônio Guedes Rangel Júnior- Reitor

Profº. Dr. Flávio Romero Guimarães- Vice-Reitor



Editora da Universidade Estadual da Paraíba

Profº. Dr. Luciano Nascimento Silva- Diretor

Coordenação de Editoração: Arão de Azevedo Souza

Capa e Editoração Eletrônica: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Ilustração da capa: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Comercialização e Divulgação: Júlio César Gonçalves Porto

Zoraide Barbosa de Oliveira Pereira

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

410

R454 Revista Educação Matemática em Foco - 2017 - Campina Grande: EDUEPB

V6 - Nº 1 - Jan/Jun. - 2017

Semestral

Editora: Kátia Maria de Medeiros

ISSN - 1981.6979

1. Formação de Professores. 2. Geometria. 3. Ensino-aprendizagem de Matemática. Pensamento geométrico 5. Interdisciplinaridade 6. Prova e demonstração em Geometria Plana. 27. ed. CDD

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - Filiada a ABEU

Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500

Fone/Fax: (83) 3315-3381 - <http://eduepb.uepb.edu.br> - email: eduepb@uepb.edu.br

UMA INVESTIGAÇÃO DIDÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS REALIZADA COM PROFESSORES-ALUNOS DE UM CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

José Carlos Pinto Leivas

SUBMISSÃO: 26 de janeiro de 2017

ACEITAÇÃO: 20 de abril de 2017

UMA INVESTIGAÇÃO DIDÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS
REALIZADA COM PROFESSORES-ALUNOS DE UM
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

A didactic investigation about quadrilaterals realized with teachers-pupils of a under graduate course

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria - UNIFRA
leivasjc@yahoo.com.br

RESUMO

O artigo apresenta resultados de uma pesquisa de cunho qualitativo, realizada em ação continuada, durante uma aula em que o professor deveria explorar o tema quadriláteros. Teve por objetivo investigar como um grupo de estudantes de pós-graduação, em uma disciplina de Geometria, classifica quadriláteros a partir da Metodologia de Investigação Matemática. Foram utilizados recursos materiais simples, como faixas coloridas de vários comprimentos, transformadas em anéis, as quais deveriam ser coladas e, posteriormente, recortadas, após os registros das conjecturas produzidas individualmente. Os resultados mostraram algumas dificuldades no que diz respeito aos processos imaginativos, na busca de visualizar, como processo de construção mental, propriedades que caracterizam grupos específicos de quadriláteros.

PALAVRAS CHAVE: investigação matemática; quadriláteros; recursos didáticos, material manipulável.

ABSTRACT

This article presents results of a qualitative research, carried out with five participants of a Geometry course, in continuous action, during a class in which the teacher applied the methodology investigative of teaching to approach the subject quadrilaterals. The purpose of this study was to investigate how the group would classify quadrilaterals using simple material resources, such as colored bands of various lengths, transformed into rings, which should be glued together and subsequently they would be cut after the records of the individually produced conjectures. The results showed some difficulties with respect to the imaginative processes, in the search to visualize, as a process of mental construction, properties that characterize specific groups of quadrilaterals.

KEYWORDS: mathematic investigation, quadrilaterals, didactics resources; manipulative materials.

Pressupostos

Investigar, em Matemática, é uma forma didática que se considera importante para incentivar estudantes à iniciação em pesquisa, pois é uma metodologia de ensino que desperta a descobertas, fugindo ao tradicional sistema em que o professor define, dá exemplo e reproduz por meio de exercícios. Não se reportará, aqui, ao significado da palavra investigar, a qual, para matemáticos profissionais, consiste em “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE et al., 2005, p. 13). Para os autores, a realização de uma investigação matemática consiste em quatro momentos:

- 1- abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões;
- 2- refere-se ao processo de formulação de conjecturas;
- 3- inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas;
- 4- diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (Idem, p. 20).

Ao abordar a investigação em educação geométrica, Ludlow e Athanasopoulou (2012) indicam que o pensamento geométrico parece desenvolver-se a partir da percepção que vai, concomitantemente, junto do raciocínio inferencial, sendo “natural supor que aprendizagem e ensino de geometria herdaram a natureza do sujeito. Então, a construção de demonstrações deveria ser acompanhada de indagação divertida (isto é, exploração acompanhada por inferência)”. (p. 18).

Uma pergunta natural é: mas por que investigação matemática? A esse respeito, Abrantes (1999, p. 3), ao indicar a ligação natural entre Geometria e investigações,

indica que: “A geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de actividades de natureza exploratória e investigativa”. Para o autor, nessa disciplina, existe uma imensidão de possibilidades de escolher tarefas cuja natureza seja a exploratória, as quais podem acontecer durante uma aula qualquer, não havendo necessidade dos famosos pré-requisitos. Indo um pouco mais além, afirma: “Explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e diversos níveis de desenvolvimento. Este facto tem implicações curriculares evidentes.” (p. 4). Assim, empregar a investigação matemática pode ser um procedimento didático muito relevante para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria e uma qualificação de seu ensino.

Isso remete ao currículo, sendo que um dos seis princípios para a matemática escolar, emanados do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (NCTM, 2008), trata exatamente desse tema ao abordar que “um currículo é mais do que um conjunto de actividades: deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo dos anos de escolaridade” (p. 15). Portanto, ao desenvolver uma disciplina de Geometria, em ação continuada de professores, são necessárias abordagens que possam oferecer subsídios para que o professor ou futuro professor repense ou pense, respectivamente, formas alternativas de desenvolvê-la quando em atuação no ambiente escolar.

Um segundo princípio que se destaca do documento diz respeito à aprendizagem: “Os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo activamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios.” (Idem, p. 21). Entende-se que a Geometria, em particular, tem sido ensinada com base em processos memorísticos de fórmulas e definições, aquilo que Skemp (2016b) denomina compreensão instrumental. Para ele, esse tipo apresenta vantagens em relação à compreensão relacional: por vezes, a Matemática instrumental é mais fácil de ser compreendida; as recompensas são mais imediatas em virtude da página de respostas das questões existir nos livros didáticos, fornecendo sentimento de

sucesso; envolve menos conhecimentos para obter a resposta correta.

Skemp (2016a) denomina compreensão relacional aquela em que o indivíduo deve saber o que fazer e o porquê. Isso conduz, no entender do autor do presente artigo, a uma forma mais eficiente e duradoura de conduzir o ensino de Geometria. Assim, entende-se que a metodologia de Investigação Matemática pode proporcionar esse tipo de compreensão de um tema que se julga importante para o desenvolvimento geométrico a partir do Ensino Fundamental, os quadriláteros, pois a experiência do autor do artigo mostra que um grande número de estudantes e, até mesmo professores em exercício, não identificam um quadrado como sendo um losango ou um retângulo, por exemplo.

Dessa forma, buscou-se, em uma aula de Geometria, num curso de ação continuada para professores, no Brasil, realizar uma atividade didática investigativa, buscando formas alternativas para o ensino do tema quadriláteros e respectiva categorização, a partir de uma compreensão relacional. Ao mesmo tempo que se desenvolveu a atividade didática, foi proposto um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, proposto por Artigue (apud BRUN, 2003).

Um aspecto que se considera importante, em um atividade didática, é não partir da definição do objeto, como é frequente ocorrer em aulas de Matemática e, com muito mais ênfase, nas de Geometria. Como, em geral, os estudantes possuem ideia intuitiva dos entes geométricos, até mesmo uma percepção visual do mesmo, pode-se partir das verbalizações iniciais que produzem a respeito do objeto de investigação. Assim,

se essa primeira verbalização coincide ou não com a definição que se irá institucionalizar, o professor lidera uma análise a respeito, que inclui examinar a coerência entre a verbalização e a representação gráfica dada, apresentando, graficamente, casos que deveriam ficar excluídos na definição e que estão sendo incluídos ou vice-versa. (Perry et al., 2012, p. 162, trad. do autor)

Nesse sentido, foi organizada uma sequência com onze itens, partindo da construção da Figura 1, com uma faixa de papel de aproximadamente 20 cm de

comprimento por 2cm de largura, até a chegada às classes de quadriláteros e respectivas propriedades.



Figura 1 - Banda em forma de anel circular¹.

Esse tipo de investigação encontra amparo no que o NCTM indica como uma das normas para a matemática escolar correspondente ao Ensino Fundamental brasileiro, em relação à conteúdo de Geometria: “analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas”. (NCTM, 2008, p. 45). Entende-se, em consonância com o documento, que, ao partir de objetos concretos, os estudantes desse nível poderão aprender sobre formas geométricas planas e, posteriormente, chegar a propriedades desses e finalizar com categorização das classes respectivas: quadriláteros, paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados e outros. Com isso, os aspectos abstratos da geometria plana se tornam construtos mentais importantes na sequência da escolaridade.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os participantes da investigação, de cunho qualitativo, serão identificados como E_1 , E_2 , E_3 , E_4 e E_5 . Moreira (2011) afirma que “o ensino se dá em um certo contexto que a pesquisa em ensino não pode ignorar e que, a rigor, é parte inseparável do fenômeno dessa pesquisa”. (p. 16). Encontrou-se amparo no autor para a realização da pesquisa constante neste artigo, que se trata de um contexto de uma aula de

¹ Atividades adaptadas de REGO, Rogéria Gaudencio do. **Matemática II** / Rogéria G. do rego, Rômulo Marinho do Rego. João Pessoa: Ed. Universitária/ UFPB, 1999.

Geometria, realizada num programa de pós-graduação em ensino. Além, o autor ainda indica que [...] “pode-se então dizer, de uma maneira bem abrangente, que o fenômeno de interesse da pesquisa em ensino tem a ver com ensino, aprendizagem, avaliação, currículo e contexto.” (Ibiden, p. 16). Assim, verificar como os estudantes da disciplina se comportam em uma atividade investigativa de um conteúdo específico possibilita avaliar como ocorre a aprendizagem e refletir sobre a forma como o currículo escolar vem sendo executado, bem como novas possibilidades de desenvolvê-lo, o que parece ser um dos objetivos de um programa de pós-graduação na área de ensino.

No que diz respeito à pesquisa qualitativa, Moreira (2011, p. 88) afirma que os estudos de caso avaliativos são aqueles que “implicam descrição, explicação e juízo; sobretudo, esse tipo e o estudo de caso examinam a informação para emitir um juízo; a emissão de juízo é o ato final e essencial da avaliação.” Nesse sentido, o procedimento metodológico empregado na presente pesquisa propõe averiguar como os estudantes evocam conteúdos já estudados na formação inicial, por meio de uma abordagem didática investigativa, em uma avaliação diagnóstica, se houve ou não aprendizagem de categorização de quadriláteros.

No que diz respeito à coleta de dados, há diversificação de formas utilizadas no ensino. A esse respeito, Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 104) afirmam que “os estudos experimentais caracterizam-se pela realização de ‘experimentos’ que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema”. Ainda mais, [...] o que diferencia esse tipo de investigação de outros é que, nesse caso, o pesquisador tenta reproduzir um fenômeno para observá-lo sob controle.”

Partiu-se da hipótese de que os participantes não tinham clareza quanto à classificação de quadriláteros e, portanto, ao reproduzir o fenômeno quadriláteros, usou-se um material concreto (Figura 1), entendendo-se ser possível ao pesquisador controlar o desencadeamento das atividades propostas aos estudantes e as hipóteses levantadas pelos mesmos. Foram propostos um total de onze passos, os quais serão apresentados, discutidos e analisados na sequência do artigo para, posteriormente, tecer juízo

nas considerações finais, os quais se acredita cumprirem com o objetivo geral da pesquisa: investigar como um grupo de estudantes de pós-graduação, em uma disciplina de Geometria, classificam quadriláteros a partir da Metodologia de Investigação Matemática.

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

A sequência foi fornecida, por escrito, com espaço para que registrassem suas considerações. Partiu-se da Figura 1 e se fez o questionamento n.1: quais propriedades você percebe na figura construída? Os registros foram os seguintes:

E₁ - É um anel em formato de circunferência cujas bordas são paralelas, em tamanhos variados.

E₂ - O comprimento (L) da linha tracejada é a largura do retângulo.

E₃ - Um retângulo ao ser colado gerou uma argola, com formado de uma circunferência e possui uma largura.

E₄ - É uma figura que dá ideia de uma superfície cilíndrica, (sem as bases). Contudo, pode ser deformada, deixando de ter forma circular. A altura é, de certa forma, constante.

E₅ - Sem considerar a emenda, esta figura não tem começo nem final, possui certa largura.

Observa-se que apenas E₄ percebeu a transformação de uma região retangular em uma superfície, o que não é muito comum de acontecer, ocorrendo isso, inclusive, em livros didáticos da escola básica. E₁ e E₃ associaram à circunferência, sem perceberem que não era um curva, e sim uma superfície.

E₂ pretendeu associar dimensão do retângulo com a da superfície, não se atendo ao aspecto geométrico esperado pelo investigador, o que demonstra que questões abertas podem proporcionar respostas inesperadas. E₅ não produziu significado em sua fala.

Já neste primeiro questionamento pode-se perceber o afirmado por Fiorentini & Lorenzato (2006) a respeito de estudos experimentais em que os indivíduos produzem afirmações a respeito de uma atividade, uma vez que a mesma solicitava que fossem

indicadas propriedades de uma figura explorada com o material fornecido.

O segundo questionamento teve por objetivo que os participantes levantassem hipóteses oriundas da construção realizada e das respostas ao primeiro item. Assim, em n.2: o que você imagina que irá ocorrer ao cortar o primeiro anel pela linha pontilhada? Registre sua conjectura.

E₁- O anel se dividirá em dois anéis semelhantes.

E₂- Teremos dois anéis, mas agora cada anel terá a metade da altura ($h/2$) e o comprimento (L) se manterá.

E₃- Os 2 anéis ficarão separados.

E₄- Ficaremos com dois anéis "iguais", de mesma altura.

E₅- Ele ficará mais estreito, conservando as propriedades.

Constata-se que E₅, embora indique que os anéis ficarão mais estreitos, afirma conservarem as propriedades, as quais não foram explicitadas no primeiro item. E₁, E₃ e E₄ respondem de forma similar que ocorrerá a separação em dois, sendo que E₁ diz serem semelhantes; E₃ afirma estarem separados e E₄, que são iguais e de mesma altura. E₂ estabelece relação entre as medidas, informando que a altura do anel se reduz pela metade, enquanto o comprimento se mantém.

Nota-se que na busca de responder o que cada indivíduo imaginava que ocorreria ao cortar o anel, se está reiterando ao que Ponte et al. (2005) indicam ocorrer em uma investigação matemática como um primeiro momento: "abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões" [...] (p. 13)

Na sequência, foram construídos dois anéis, partindo de duas regiões retangulares de mesmo comprimento e largura, com linhas tracejadas ao longo da dimensão maior, sendo cada região em uma cor diferente, de modo que, na continuidade da investigação, os estudantes pudessem perceber a separação em lados opostos de mesma cor e, posteriormente, se propôs a questão n.3: imagine

o que você iria encontrar se cortasse o primeiro anel ao longo da linha tracejada. Registre sua hipótese.

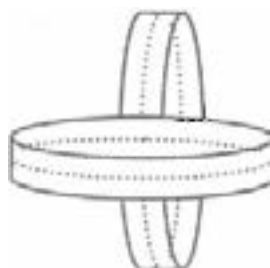


Figura 2 - Dois anéis colados ortogonalmente um ao outro.

Veja o que foi apresentado pelos sujeitos da pesquisa.

E_1 - Se eu cortasse o primeiro anel, o segundo também se cortaria e ficaria parecido com um fone de ouvido, conforme ilustração. (Figura 3)

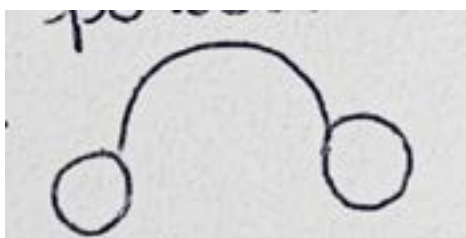


Figura 3 - Representação de E_1 .

E_2 - O primeiro anel será repartido em dois anéis com $h/2$ e o segundo anel será repartido com um corte no sentido de sua altura, assim formará um retângulo.

E_3 - Ficará uma fita com dois anéis, um em cada ponta.

E_4 - Ficaremos com uma única figura cujas extremidades serão a metade do anel cortado, sendo conectados pelo outro anel "aberto".

E_5 - Um ficará com metade da largura e o segundo será cortado, deixando de ser anel. Parece uma álgebra. (Figura. 4).

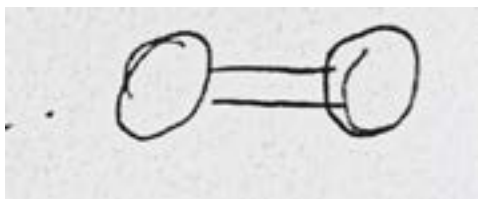


Figura 4 - Representação de E_5 .

Até onde pode ser percebido, parece que todos os indivíduos construíram imagens similares às indicadas nas Figura 3 e Figura. 4. Aqui, invoca-se o que Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p.iii) indicaram: “com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem, necessariamente, entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais.” Isso é reiterado na questão n.4: recorte somente o primeiro anel e discuta se sua hipótese foi ou não comprovada com seus colegas e com o professor. Registre.

Ao que tudo indica, todos conseguiram se expressar de forma similar a E_1 - *Ao cortar, ficou parecida com a ilustração feita no item anterior.* A excessão foi E_2 , que parece ter antecipado o que viria a ser solicitado no próximo item, corroborando o que havia ensaiado no item anterior a respeito de ser um retângulo. Esse aluno imaginou o corte dos dois anéis, antecipadamente, como pode ser observado na Figura 5, assim se expressando: *teremos um retângulo maior com uma abertura no seu interior na forma de retângulo menor.* Percebe-se que o mesmo não relaciona retângulo como um polígono, mas vai nessa direção.

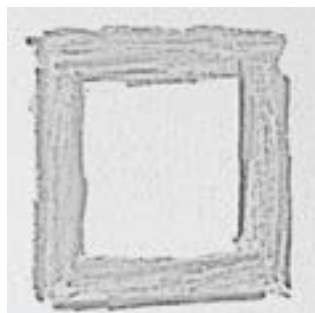


Figura 5 - Representação de E_2 .

Esperava-se que a imaginação invocada no enunciado das questões 3, 4 e 5 permitisse que os estudantes conseguissem esboçar a hipótese da existência de quatro ângulos retos e, além disso, quatro lados paralelos e congruentes, caracterizando, portanto, um quadrado [considerando, intuitivamente, as faixas como lados de polígonos, como feito pelo aluno E_2]. Veja o que os investigados produziram a respeito do item n.5: imagine o que irá ocorrer com a figura, se você vir a cortar o segundo anel pela linha tracejada. Registre.

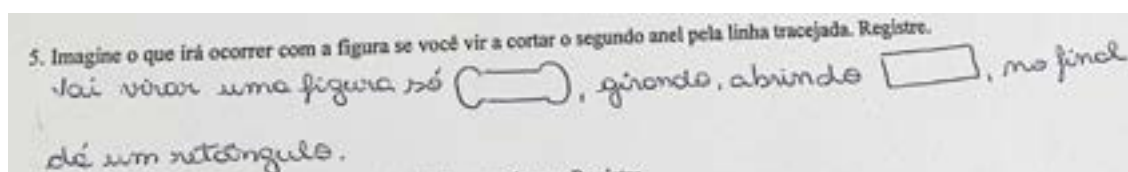


Figura 6- Registro de E_1

E_3 - Ao cortar, vai se formar uma região retangular.

E_4 - Teremos uma figura que se assemelha a um quadrilátero, especificamente, a um quadrado.

E_5 - A estrutura se tornará um contorno de um retângulo.

Ao que tudo indica, a imaginação geométrica desses alunos está muito próxima da realidade investigada. Verifica-se a isso na seguinte referência: "Atualmente, é

interessante observar que essa atitude tem se invertido entre os matemáticos e, enquanto as figuras geométricas são utilizadas, com ajuda, para a imaginação, a decisão final nas questões de dedução lógica e, inclusive, em termos geométricos, tem sido a álgebra". (SKEMP, 1976, p. 285, trad. do autor)

O próximo item solicitava que fosse feito o recorte da segunda banda e discutida a hipótese feita à luz do resultado obtido a partir do corte. A seguir, apresentam-se as justificativas dos sujeitos.

E₁- Ao recortar, se percebe que virou uma figura parecida com um quadrado. Ao medir com régua, percebeu-se que tem mesmas medidas nos lados e, como os anéis são iguais, eles têm mesma medida.

Observa-se, no registro do estudante, que não teve a percepção do que ocorreria, pois, no item anterior, tinha imaginado um retângulo. Mesmo com o recorte, não confiou na visualização da figura e procurou instrumentos de medição para chegar à conclusão.

E₂- apenas fez um registro figural em formato de quadrado e E₃ diz que sua hipótese estava correta, por ter sido formada uma região quadrada.

E₄- é comprovada porque os dois anéis iniciais foram colados de forma ortogonal; além disso, os dois tinham o mesmo tamanho, garantindo as condições para ser quadrado – lados de mesma medida com ângulos retos.

E₅- um quadrado, pois as argolas eram de mesmo tamanho e foram coladas ortogonalmente.

Vê-se, neste item, que os alunos necessitaram recortar o segundo anel, a fim de terem certeza ou refazerem a hipótese inicial feita. Isso reafirma o que Piaget e Inhelder (1993) afirmam sobre a percepção, a qual permite a identificação do objeto na sua presença, enquanto a representação só irá ocorrer na ausência desse. Isso induz ao que Leivas (2009) denomina visualização, como sendo um construto mental, o qual pode ser invocado com ou sem a presença do objeto.

A fim de dar um passo além na investigação, foi proposta a questão n. 7:

como deveriam ser colados os dois anéis para que você obtivesse um losango? Em geral, houve uma referência à Figura 2, constante da primeira atividade. Não houve consenso a respeito de que um quadrado é um losango e, portanto, poderia ter sido respondido da mesma forma anterior para a obtenção do quadrado.

E_5 afirmou que deveriam ser colados com um ângulo diferente de 90° e com anéis de tamanhos distintos, o que não está correto, pois losangos possuem lados congruentes. E_2 , de forma similar, disse que os anéis deveriam ser colados de modo análogo ao feito na atividade 3 (Figura 2), só que as linhas tracejadas deveriam ficar concorrentes (o que não poderia deixar de ser), mas não perpendiculares. Com isso, excluiu, também, a possibilidade de quadrados serem losangos (por terem ângulos retos).

O estudante E_3 indicou: *devem ser colados do mesmo modo da figura na questão 3, entretanto, não se garantindo a ortogonalidade, colando com uma angulação não necessariamente de 90°* . Com isso, ele possibilitou obter losangos que fossem quadrados ao escrever – **não garantindo-se...não necessariamente...** (grifo do autor).

E_1 - *não sei, poderia ser colado da mesma maneira, pois acredito que as diagonais do quadrado formariam um ângulo de 90° e poderia ser considerado um losango esse quadrado*. Embora tenha dito não saber, percebe-se que se lembrava de uma propriedade dos losangos, de que suas diagonais se cortam ortogonalmente e, nesse caso, o conjunto dos quadrados seria um subconjunto dos losangos, corretamente.

Por fim, E_4 respondeu de forma bem completa: *podem ser colados da mesma forma, pois todo quadrado é um losango. Além disso, qualquer colagem que for realizada com dois anéis iguais, independente da inclinação entre eles, segundo os passos da construção, irá gerar losangos*. Vê-se, com isso, que esse estudante chegou ao conceito de losango de forma correta, ou seja, o quadrilátero com os quatro lados de mesma medida.

A partir desse item da investigação, o objetivo foi verificar se os participantes

da pesquisa conseguiriam ter maior clareza sobre a conceituação e categorização de quadrados e losangos, o que foi investigado no item 8: reflita sobre quadrados e losangos. Qual sua definição provisória para ambos?

Todos conseguiram responder, de forma correta, indicando propriedades necessárias para cada um dos conceitos, ou seja, ambos possuem os quatro lados de mesma medida e quadrados também necessitam ter os quatro ângulos retos.

Na busca de relação entre o conjunto dos retângulos e dos quadrados foi feito o questionamento n. 9: como devem ser os anéis para se obter retângulo que não seja quadrado? Veja que, no enunciado, não foi frisada a palavra colados, pois se esperava referência aos comprimentos das duas tiras. Nesse momento, os participantes já haviam explorado várias construções e respondido a vários questionamentos, buscando identificar e relacionar os quadriláteros por meio de propriedades específicas de cada um deles.

Houve unanimidade nas respostas de que os anéis deveriam ser de medidas diferentes e colados ortogonalmente, como feito no terceiro item. Assim, observou-se um avanço no processo investigativo, de modo que os estudantes passaram a se questionar internamente, buscando características não visíveis que, mentalmente, visualizavam na presença do objeto concreto. Portanto, a investigação já mostra um ganho acentuado nesse processo, conduzindo à positividade do emprego da Metodologia de Investigação.

Dando continuidade ao procedimento investigativo, foi proposto o item n.10: e para ser um paralelogramo que não seja um quadrado, nem retângulo e nem losango? Aqui o investigador esperava que fossem identificados os paralelogramos propriamente ditos, que possuem um par de lados paralelos e o outro não. Para que isso ocorresse, os anéis deveriam ser colados não ortogonalmente e seus comprimentos poderiam ser iguais ou não.

E₅ afirmou que os anéis deveriam ter tamanhos diferentes e **não necessariamente** ortogonais. Não foi incisivo em sua explicação com o termo grifado pelo pesquisador.

Os demais indicaram que deveriam ser pegos dois anéis de tamanhos diferentes e colados de maneira não ortogonalmente. A necessidade de que as faixas fossem de comprimentos distintos não acarretava a que os paralelogramos tivessem pares de lados de comprimentos diferentes.

Para finalizar a investigação, buscou-se saber se haveria possibilidade de obter um trapézio com essa forma, envolvendo anéis com colagens e recortes, ao que apenas E_2 disse não saber. Os demais indicaram que sempre haveria dois pares de lados paralelos e, num trapézio, ocorre apenas um par, portanto, sendo impossível a obtenção desse tipo de quadrilátero com essa metodologia investigativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se, no presente artigo, uma investigação com cinco estudantes de um programa de pós-graduação, por meio de uma atividade investigativa, realizada durante uma aula de uma disciplina de Geometria no segundo semestre de 2016, a qual teve por objetivo investigar como um grupo de estudantes de pós-graduação, em uma disciplina de Geometria, classifica quadriláteros a partir da Metodologia de Investigação Matemática.

Inicialmente, foram distribuídas duas faixas de mesmo comprimento, de duas cores diferentes, transformadas em anéis (Figura 1), com uma linha tracejada, de modo que fossem coladas com as duas linhas interseccionando-se ortogonalmente. Os alunos foram questionados sobre propriedades do anel, o que sua imaginação indicaria se fosse cortado um deles ao longo da linha tracejada [formando duas argolas paralelas na mesma cor] e, posteriormente, se o mesmo fosse feito com o segundo anel [proporcionado outros dois lados paralelos na outra cor]. Com isso, haveria a hipótese de que os dois recortes promoveriam uma figura em forma de quadrado,

uma vez que as linhas, cruzando-se ortogonalmente, formariam ângulos de 90° , com cores idênticas em posições paralelas e, sendo os anéis de mesmo comprimento, os lados seriam todos congruentes. Portanto, a figura seria um quadrilátero com lados paralelos dois a dois e congruentes – quadrado.

Na sequência, os estudantes foram questionados quanto à possibilidade de obterem losangos por um processo similar, o que deveria ocorrer tomando-se duas tiras de mesmo comprimento e colando-as em forma de anéis, não necessariamente, ortogonais. Com isso, seria possível obter losangos, propriamente ditos, que não fossem quadrados, pois não ocorreriam ângulos retos, se não fossem colados de forma ortogonais. Foi proposto que elaborassem definições provisórias de quadrados e losangos para, posteriormente, haver discussão entre os participantes e o professor. Concluiu-se que todo quadrado possui as mesmas propriedades dos losangos, desde que os ângulos internos sejam todos retos. Portanto, o conjunto dos quadrados é um subconjunto do conjunto dos losangos e, conseqüentemente, dos paralelogramos. Desse modo, reafirma-se o indicado por Ludlow e Athanasopoulou (2012), a respeito da Investigação Matemática, indicando que o pensamento geométrico parece desenvolver-se a partir da percepção junto do raciocínio inferencial.

Na próxima investigação, os estudantes foram desafiados a tomarem faixas, formarem anéis e, posteriormente, recortá-las, como nas atividades anteriores, de modo a obterem retângulos que não fossem quadrados. Havia a expectativa do investigador de que os estudantes tomariam duas faixas de tamanhos distintos, formassem dois anéis e os colassem de forma ortogonalmente. Ao discutirem previamente, levantariam hipóteses e, posteriormente, recortariam. Deveriam comprovar que tinham obtido retângulos e, se tivessem tomado as duas faixas de comprimentos iguais, teriam o quadrado, afirmando, portanto, que o conjunto dos quadrados também é um subconjunto do conjunto dos retângulos. Assim, a atividade consistia na interseção dos dois conjuntos de quadriláteros, a saber, um quadrado tanto é retângulo quanto losango. Os losangos que são retângulos são os quadrados

e vice-versa. Além disso, constataram que todos eles constituem o conjunto dos paralelogramos, uma vez que a investigação mostrava, sempre, serem obtidos lados paralelos dois a dois.

Assim, o investigador propôs que verificassem se haveria paralelogramo que não fosse nenhum dos três quadriláteros anteriores, ao que foi indicado serem necessárias duas faixas de comprimentos distintos e não coladas ortogonalmente, o que proporcionaria quadrilátero de lados paralelos dois a dois, não congruentes e não ortogonais. Ao finalizar, foi perguntado se seria possível a obtenção de um trapézio com esse tipo de material, ao que somente um aluno disse não saber. Os demais afirmaram não ser possível.

Parece evidente que a atividade investigativa proporcionou uma retomada desse conteúdo e um avanço na redescoberta de propriedades de quadriláteros que conduzem a uma classificação dos mesmos. Considera-se que a atividade de investigação matemática foi relevante para essa construção didática desses estudantes e que poderá produzir frutos na prática profissional dos mesmos, o que vai ao encontro do indicado pelo NCTM sobre o currículo escolar como sendo um conjunto de atividades coerentes e que tornam a Matemática significativa para os alunos, o que indica ter sido alcançado nesta investigação que cumpriu com o seu objetivo de investigar como um grupo de estudantes de pós-graduação, em uma disciplina de Geometria, classifica quadriláteros a partir da Metodologia de Investigação Matemática.

Portanto, o esquema experimental, empregando realizações didáticas no sentido apontado por Artigue, proporcionou uma compreensão relacional do tema quadriláteros que, embora havendo muitos estudos e pesquisa a respeito, ainda apresenta dificuldades tanto no ensino quanto na aprendizagem desse conteúdo na escola. Muitas vezes, esse conteúdo é desenvolvido, especialmente no Ensino Fundamental, por meio de uma compreensão instrumental memorizando fórmulas (SKEMP, 2016b) e, poucas vezes, em Geometria, há uma aprendizagem significativa nessa forma de compreensão.

Assim, empregar a Investigação Matemática pode ser um procedimento didático muito relevante para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria e uma qualificação de seu ensino.

Referências

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na Sala de Aula. Texto publicado no livro de E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.). **Ensino da Geometria no Virar do Milênio**. Lisboa: DEFCUL. 1999. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf>. Acesso em 21 nov. 2016.

BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S.. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados. 2006.

HILBERT, D. and COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de Possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. Tese (Doutorado em Educação). UFPR. Curitiba, 2009, 294 p.

LUDLOW, A.S. e ATHANASOPOULOU A. Diversión y demostración, percepción sensorial e inferência. ¿ In: Uribe, L. C. (compilador). **Investigaciones em educación geométrica**. Bogotá: Editorial UD. 2012.

MOREIRA, M.A. **Metodologia de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editoria Livraria da Física. 2011.

PERRY, P.; SAMPER, C.; CAMARGO, L.; MOLINA, Ó., ECHEVERRY, A. Aprender a demonstrar: ¿ enculturación o... ¿ In: Uribe, L. C. (compilador). **Investigaciones em educación geométrica**. Bogotá: Editorial UD. 2012.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. ed., Belo Horizontes: Autêntica. 2005.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2008

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. Madri: Ediciones Morata. 1976.

SKEMP, R. Compreensão relacional e compreensão instrumental. **Educação e Matemática**, n.136. pp. 44-48. 2016^a.

SKEMP, R. Compreensão relacional e compreensão instrumental. **Educação e Matemática**, n.137. pp. 24-28. 2016^b.