



V6 - Nº 1 - jan/jun - 2017



REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº1, Jan-Jun 2017

Copyright © 2017 EDUEPB

A reprodução não-autorizada desta publicação, por qualquer meio, seja total ou parcial, constitui violação da Lei nº 9.610/98. A EDUEPB segue o acordo ortográfico da Língua Portuguesa de 1990, em vigor no Brasil, desde 2009.



UEPB Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Antônio Guedes Rangel Júnior- Reitor

Profº. Dr. Flávio Romero Guimarães- Vice-Reitor



Editora da Universidade Estadual da Paraíba

Profº. Dr. Luciano Nascimento Silva- Diretor

Coordenação de Editoração: Arão de Azevedo Souza

Capa e Editoração Eletrônica: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Ilustração da capa: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Comercialização e Divulgação: Júlio César Gonçalves Porto

Zoraide Barbosa de Oliveira Pereira

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

410

R454 Revista Educação Matemática em Foco - 2017 - Campina Grande: EDUEPB

V6 - Nº 1 - Jan/Jun. - 2017

Semestral

Editora: Kátia Maria de Medeiros

ISSN - 1981.6979

1. Formação de Professores. 2. Geometria. 3. Ensino-aprendizagem de Matemática. Pensamento geométrico 5. Interdisciplinaridade 6. Prova e demonstração em Geometria Plana. 27. ed. CDD

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - Filiada a ABEU

Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500

Fone/Fax: (83) 3315-3381 - <http://eduepb.uepb.edu.br> - email: eduepb@uepb.edu.br

A VALORIZAÇÃO DE VALIDAÇÕES EMPÍRICAS EM ATIVIDADES GEOMÉTRICAS: UM REFLEXO DO CENÁRIO DESENHADO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Eberson Paulo Trevisan

José Luiz Magalhães de Freitas

SUBMISSÃO: 30 de março de 2017

ACEITAÇÃO: 04 de maio de 2017

A VALORIZAÇÃO DE VALIDAÇÕES EMPÍRICAS EM ATIVIDADES GEOMÉTRICAS: UM REFLEXO DO CENÁRIO DESENHADO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Appreciation of empirical validations in geometric activities: a reflection of the scenario designed for the teaching of geometry

Eberson Paulo Trevisan
Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT
eberson76@gmail.com

José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul-UFMS
joseluizufms2@gmail.com

RESUMO

Neste artigo são apresentados os resultados de uma pesquisa, realizada com professores da rede pública estadual de um município de Mato Grosso, em que analisamos propostas didáticas de trabalho, elaboradas pelos professores, para serem trabalhadas em aulas de Matemática, envolvendo conteúdos de Geometria, visando explorar validações em duas categorias de provas: empíricas e teóricas. Observamos que as produções realizadas tendem a valorizar o emprego efetivo de apenas uma das categorias, a das provas empíricas. Além disso, a grande marca das provas teóricas produzidas foram os equívocos encontrados em suas formulações. Estes elementos refletem, em parte, o cenário do ensino de Geometria desenhado por muitas pesquisas, mostrando a existência de uma grande lacuna em relação ao ensino de provas e validações teóricas em Geometria, o que indica a necessidade de reflexão acerca da formação inicial e continuada de professores de Matemática no que tange ao ensino de Geometria.

Palavras-Chaves: Ensino de Geometria, Provas Empíricas e Teóricas, Formação de Professores.

ABSTRACT

In this article we present results of a research carried out with teachers of the public education of a municipality of Mato Grosso, in which we analyze didactic work proposals, elaborated by the teachers to be worked in Mathematics classes, involving contents of Geometry, to explore validations in two categories of proofs: empirical and theoretical. We observe that the productions performed tend to value the effective use of only one of the categories, that of the empirical proof. Besides that, the great mark of the theoretical proofs produced were the mistakes found in its formulations. These elements reflect in part the scenario of the teaching of Geometry designed by many researches, showing the existence of a great gap in relation to the teaching of proofs and theoretical validations in Geometry, which indicates the necessity of reflection on the initial and continued formation of mathematics teachers in what concerns the teaching of Geometry.

Keywords: Teaching of Geometry, Empirical and Theory Proofs, Teacher Training.

INTRODUÇÃO

Neste artigo, apresentamos um estudo sobre o ensino de Geometria focado na articulação entre duas categorias de provas: empíricas e teóricas, elaboradas por um grupo de professores que ensinam Matemática na rede pública do município de Sinop/MT, frente a um conjunto de atividades de Geometria.

No que concerne aos procedimentos de produção e análise dos dados, buscamos uma aproximação metodológica com a Engenharia Didática de Artigue (1996) por meio da realização de um curso de extensão oferecido a professores de Matemática. No curso, foi aplicado um conjunto de atividades previamente selecionadas, que exploravam propriedades geométricas possíveis de dedução, por meio do emprego dos casos de congruência de triângulos, visava a construção de propostas de trabalho para explorar a produção de provas empíricas e teóricas no contexto da sala de aula.

No curso e no presente artigo, assumimos como provas empíricas todas aquelas produzidas em um processo que vise à constatação da verdade, que pode ser convencimento próprio ou comunitário, de uma dada propriedade cuja argumentação elaborada se apoia no manuseio de materiais manipuláveis, na construção, na comparação sobre desenhos ou manipulação de figuras, inclusive em softwares de computador, ou seja, que têm como motor principal os procedimentos de experimentação.

Por outro lado, assumimos como provas teóricas as que visam a constatação da verdade de uma proposição por meio de uma argumentação do ponto de vista matemático, ou seja, pautada em conceitos e proposições, e baseadas na estrutura de um discurso dedutivo, apesar de nem todas as provas produzidas pelos professores utilizarem o encadeamento lógico aceito pela comunidade matemática. O fato de sentirem a necessidade e de tentarem o emprego de elementos teóricos matemáticos nos levou a nomear estas por provas teóricas.

Neste presente artigo, investigamos a articulação dessas duas categorias de

provas produzidas pelos professores colaboradores da pesquisa, buscando destacar a explícita valorização encontrada, de uma das categorias, a das provas empíricas, adotadas pelo coletivo de professores frente às construções realizadas.

A valorização das provas empíricas para trabalho efetivo em sala de aula reflete a própria tendência que parece consolidada do ensino de Geometria na Educação Básica, ou seja, o abandono desta importante área da Matemática, desenhada em decorrência de um processo histórico, como procuramos apresentar na próxima seção.

Como consequência deste cenário, alguns frutos ruins vêm sendo colhidos há algum tempo. Isto traz prejuízos ao processo de aprendizagem em Geometria, como procuramos destacar na análise apresentada na parte final deste trabalho. Assim, procuramos apontar para a necessidade de maior reflexão por parte da comunidade escolar e acadêmica acerca da temática.

1. Desenhando o cenário do ensino de Geometria

Ao buscar lançar um olhar, sobre a construção de propostas didáticas, que visam trabalhar com provas empíricas e teóricas que explorem os casos de congruência, a partir de atividades elaboradas por professores da Educação Básica, nosso olhar também se volta ao próprio ensino da Geometria. Contudo, ao procurar referências ao ensino de Geometria na Educação Básica nas últimas décadas, parece inevitável não nos depararmos com a questão de seu abandono. Sena e Dorneles (2013), ao olharem para o cenário das pesquisas produzidas nos programas de mestrado e doutorado entre os anos de 1991 e 2011 no que tange ao ensino da Geometria, constataam que:

As duas últimas décadas de pesquisa em geometria revelam que o estudo desta área não é uma das prioridades no ensino da matemática, apontando para um descaso que parte do processo histórico e se faz presente no cotidiano atual. Entre os desafios, persiste a falta de preparo dos professores para trabalhar com a matemática de forma geral, especialmente a geometria (SENA; DORNELES, 2013, p. 154).

Crescenti (2008, p. 84) também destaca este fato, afirmando que “pesquisas desenvolvidas no final do século XX e início do século XXI continuam indicando a ausência da abordagem dos conteúdos geométricos nas escolas ou seu ensino de maneira superficial”. O fato de este aparente abandono ser fruto de um processo histórico, ainda presente atualmente, já vem sendo contextualizado a partir das publicações de pesquisas que estudaram este fenômeno há algum tempo, especialmente no final do século passado.

Lorenzato (1995), entre outros, enfatiza bem a questão do abandono da Geometria, afirmando:

O Ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desviado; alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas em raciocínio lógico dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. No Brasil, já fomos mais além, a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula (LORENZATO, 1995, p. 3).

Pavanello (1993) apresenta uma abordagem histórica sobre o ensino da Geometria no Brasil, buscando identificar as causas e consequências desse abandono. A autora conclui que: “o abandono do ensino da Geometria deve, portanto, ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação” (PAVANELLO, 1993, p. 16). A atribuição das causas a esse fato é levantada ao longo do artigo, refletindo elementos como: criação do Ministério da Educação e Saúde em 1930; reforma do ensino profissional em 1942; criação da lei orgânica do ensino secundário, em 1942; e elaboração de novos programas para o até então ensino secundário, em 1951, proposto pelo Ministro da Educação.

Além desses, outros pontos são apontados, como a influência do desenvolvimento econômico no ensino de diferentes disciplinas, inclusive a Matemática, principalmente a partir de 1960. Também nessa época, temos a influência do chamado Movimento da Matemática Moderna, “cuja ideia central é adaptar o ensino da Matemática às novas

concepções surgidas com a evolução desse ramo do conhecimento” (PAVANELLO, 1993, p. 13). Logo na sequência, surgem então os primeiros livros didáticos formulados com base nas tendências ditadas por esse movimento.

Quanto ao caso particular da Geometria frente ao movimento da Matemática moderna, Pavanello (1993, p. 13) destaca:

Opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adota-se para sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem “intuitiva” que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais podem-se resolver alguns problemas.

Aqui, como vemos, a Geometria passa a perder seu caráter dedutivo e passa a ser explorada com uma preocupação voltada às aplicações práticas, na busca de resultados imediatos. Lorenzato (1995, p. 4) destaca também a influência desse movimento afirmando que “a proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje”.

Pavanello (1993) destaca ainda que a situação se agrava mais com a entrada em vigor da Lei nº 5.692/71 - Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus, pois ela “permite que cada professor monte seu programa de acordo com as necessidades de sua clientela” (p. 13, destaque da autora). Nesse caso, muitos alunos passam a não receber aulas de Geometria, em prol de um trabalho mais acentuado na álgebra e na teoria dos conjuntos, por parte dos professores.

Outros fatores também intervêm nesse processo de abandono. Essa ausência de ensino da Geometria acaba por afetar diretamente a formação de futuros professores, e o problema se comporta de forma cíclica, indo ao encontro de uma das duas causas apontadas por Lorenzato (1995) para o abandono do ensino da Geometria, relacionado à sala de aula. Segundo o autor, “muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas” (p. 3). Claro, como adquirir conhecimento frente ao estado de abandono vivenciado?

A segunda causa de ausência do ensino de Geometria, apontada por Lorenzato (1995, p. 4), merece também atenção, a saber, nas palavras do autor:

A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. E como a Geometria neles aparece? Infelizmente, em muitos deles, a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligados de quaisquer aplicações ou explicação de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de fórmulas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria é quase sempre apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade de não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.

Contudo, nas últimas décadas algumas mudanças ocorreram com este importante material didático, apesar dessa aparente dependência do livro didático ainda estar presente em muitas práticas pedagógicas, pelos motivos mais diversos destacados acima, algumas inadequações, como a destinação dos últimos capítulos para a Geometria, parecem ter sido solucionadas, pois um dos critérios para avaliação das coleções pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) é justamente a distribuição dos conteúdos ao longo dos volumes das coleções.

No entanto essa distribuição “igualitária” não garante o trabalho efetivo dos conteúdos em sala de aula. Nós mesmos temos constatado este fato em orientações de pesquisas realizadas por alunos de graduação, do curso em que trabalhamos. Em uma pesquisa¹, por exemplo, apresentamos a um grupo de professores uma lista de conteúdos, dentre os quais eles deveriam fazer uma escolha, destacando aqueles que priorizariam em virtude da aproximação do final do ano letivo, pondo-se na situação de não haver tempo hábil para ministrar todos os conteúdos previstos para aquele ano letivo. As escolhas realizadas mostraram uma valorização dos conteúdos algébricos, se comparados com os conteúdos geométricos.

Apesar dessa flexibilidade de escolha de conteúdos advir de longa data em nosso país, ele continua a se apresentar como problemático frente à questão do ensino da

¹ Resultados desta pesquisa foram apresentados em 2014 no ENAED – Encontro Anual de Educação – promovido anualmente pela UNEMAT - Sinop.

Geometria. Almouloud *et al.* (2004) atribui justamente a esse fato o princípio dos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos, afirmando que:

Em primeiro lugar, identificamos como fator de dificuldades o nosso sistema educativo, que define a política da educação com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os conteúdos e o saber-fazer, deixando para cada escola definir os conteúdos que julga importantes para a formação de seus alunos, o que faz com que a Geometria seja frequentemente esquecida (ALMOULOUD *et al.*, 2004, p. 99).

Frente a todo esse cenário, temos que nos preocupar com as consequências dessa renúncia, com a ausência de elementos essenciais à aprendizagem desse domínio da matemática. Destacamos que, segundo Pavanello (1993), o principal prejuízo diz respeito justamente à aprendizagem, destacando que:

A ausência do ensino da Geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade de desenvolvimento integral dos processos de pensamento, necessário à resolução de problemas (PAVANELLO, 1993, p. 16).

O efeito desse abandono frente à tentativa de valorização da Geometria na sala de aula tem uma particularidade marcante na maioria das ocasiões em que a Geometria é trabalhada, segundo Imenes (1987, p. 57), “em geral, os alunos são apenas informados a respeito de certas propriedades das figuras. Nem descobrem tais propriedades fazendo experiências, nem chegam a elas fazendo deduções”. E, principalmente, afastou-se o enfoque dedutivista em favor de um enfoque empirista, conforme Grando *et al.* (2008, p. 42):

Essas denúncias de abandono acabaram por mobilizar a comunidade de educadores matemáticos a buscar, inicialmente, alternativas para o ensino de Geometria com exemplos de atividades e uso de materiais manipuláveis, numa visão bastante empirista.

Apesar do abandono, referente à sala de aula, apresentado acima, é destaque a crescente discussão sobre o ensino de Geometria em eventos especializados, como é o caso apontado por Andrade e Nacarato (2004) ao analisarem os anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), ocorridos entre os anos de 1987 e 2001,

os quais destacam que “os trabalhos em Geometria se mantiveram na média de 20% do total de trabalhos apresentados nos sete encontros. [...], podemos considerar esse percentual de trabalhos em Geometria bem relevante” (ANDRADE; NACARATO, p. 15).—

Ocorre que os trabalhos analisados também evidenciam uma mudança de tendência, pois, segundo Andrade e Nacarato (2004, p. 8), “o que constatamos em nosso estudo foi o fato de uma abordagem mais experimental estar substituindo a ênfase dada a uma concepção axiomática do ensino de Geometria”. A mudança é boa e necessária, o problema é a troca de um extremo pelo outro, ou seja, da completamente dedutiva pela completamente empírica.

Enfocando o ensino de Geometria, Pais (2000) realiza uma análise do significado da utilização dos recursos didáticos nesse âmbito, chegando a conclusões interessantes, a saber:

Quanto ao uso de materiais didáticos no ensino da Geometria, este estudo coloca em evidência duas concepções igualmente externas e redutoras dos valores educacionais deste conteúdo: uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da Geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos (PAIS, 2000, p. 14).

O que se espera do ensino da Geometria na Educação Básica é na verdade a busca pelo equilíbrio entre o empírico experimental e o teórico dedutivo, como o próprio autor sugere em outra obra:

Há duas posições radicais que devem ser evitadas: (a) conduzir o ensino, fazendo uso somente de um raciocínio lógico dedutivo, tal como pressupõe a especificidade do território do saber matemático, (b) desconsiderar esse tipo de raciocínio na educação escolar. Entre essas duas posições equivocadas, reforçamos a ideia de diversificar os tipos de argumentação. Além de alguns raciocínios demonstrativos, [...] o aluno deve ser levado a expressar seu pensamento lógico de diferentes maneiras. Verificação de

casos particulares, realização de desenhos, redação de textos, debates, comprovações experimentais são maneiras diferentes como a categoria da argumentação pode ser trabalhada no contexto escolar (PAIS, 2006, p. 55).

Essa preocupação pela busca de significados, de equilíbrio entre esses dois modelos, é realmente o que assumimos ao nos lançarmos na busca de observar a valorização da articulação entre as provas empíricas e teóricas, frente às atividades de Geometria envolvendo os casos de congruência de triângulos, em propostas de intervenções didáticas realizadas por professores de escolas públicas, que trazemos para discussão no presente artigo.

Enfim, concordamos com Nacarato (2002, p. 90) sobre o objetivo do ensino de Geometria na Educação Básica, o qual “deve estar voltado à aquisição teórica desse corpo de conhecimento. Acredita-se que, ao seu final, o estudante seja capaz de fornecer uma prova matemática satisfatória. No entanto, para se chegar à abstração é necessária uma vivência experimental”. Esta vivência experimental, cremos que possa ser explorada na construção de validações empíricas, a qual, a nosso ver, necessita ser articulada com elementos teóricos da Matemática, possibilitados pela elaboração das provas, que chamamos no trabalho de provas teóricas.

2. Aspectos metodológicos

Como já adiantamos na introdução deste artigo, na metodologia adotada, buscamos uma aproximação com a Engenharia Didática de Artigue (1996). Aproximação no sentido de que tínhamos em mente as quatro fases que compõem a Engenharia Didática: fase das análises prévias, fase das concepções e das análises *a priori*, fase da experimentação, fase da análise *a posteriori* e validação. Porém, para a pesquisa, algumas dessas fases foram estruturadas com alterações em relação aos pressupostos da Engenharia Didática descrita por Artigue, mas mantendo algumas configurações ditadas por essa metodologia, cujo detalhamento das alterações, pode ser observado em Trevisan (2016).

Quanto à produção dos dados propriamente dita, ela se deu no ambiente de um curso de extensão ofertado a um grupo de doze professores de Matemática, sendo todos da rede pública estadual de Mato Grosso, atuantes em escolas do município de Sinop. Os dados foram produzidos a partir da aplicação de um conjunto de nove atividades (anexadas no final do artigo) previamente selecionadas, que visavam a produção de propostas de trabalho para explorar provas empíricas e teóricas em sala de aula. Tais produções foram realizadas em trios pelos professores, os quais receberam, na análise, um código com duas letras e um algarismo (exemplo: P2A): o algarismo indica o trio pertencente (trio 2, no exemplo dado), a letra P faz menção à palavra Professor e a última letra é aleatória ("A", no exemplo dado), permitindo a identificação do professor por parte dos pesquisadores.

Cada atividade visava explorar uma propriedade geométrica cuja demonstração poderia ser feita utilizando os casos de congruência de triângulos. Frente à cada atividade, os professores foram convidados a elaborar uma solução empírica e uma solução teórica para a mesma e relatar como tal solução poderia ser explorada em sala de aula. Também era solicitado que indicasse se seria possível trabalhar com a atividade em sala de aula, apontando possíveis limitações para seu efetivo trabalho.

Todo o material produzido era recolhido em cada atividade realizada. O trio, ao finalizar a mesma, explicava o que e como havia feito. Estas explicações foram gravadas em áudio e vídeo e, juntamente com o material escrito produzido, se constituíram em dados a serem analisados. Um dos elementos que mais chamou a atenção nas produções foi a adoção explícita de uma das categorias de provas para o trabalho em sala de aula, ausentando a exploração por parte dos alunos da outra categoria, além do grande número de equívocos encontrados nas provas teóricas apresentadas, como veremos nas próximas seções do artigo.

1.

3. Provas empíricas ou teóricas no trabalho efetivo da sala de aula?

Na realização do curso, os professores sempre foram estimulados a construir propostas para aplicação em sala de aula, que trabalhassem com atividades geométricas, previamente selecionadas, em duas categorias de provas: uma que chamamos de teórica, mais próxima possível de uma demonstração Matemática; e a outra que chamamos de empíricas. O que vimos nos trabalhos realizados foi a convergência e, com grande intensidade, a intenção de adoção de apenas uma categoria para o trabalho em sala de aula: a categoria das provas empíricas.

Destacamos que esta convergência para a intenção de trabalho com a prova empírica ficou explícita, tanto nas falas ocorridas nas apresentações, quanto nas produções entregues pelos trios de professores participantes do curso de extensão oferecido.

Primeiro ponto a ser destacado para justificar esta constatação de valorização das provas empíricas diz respeito ao fato de não aparecer, nos materiais entregues pelos quatro trios, nas nove atividades trabalhadas, nenhuma formulação de proposta explícita para se trabalhar com a validação teórica. Este fato, em si, já evidencia uma negligência quanto à intenção de trabalho com este tipo de prova em sala de aula, diferentemente da empírica, da qual foram dados encaminhamentos, em forma descritiva e sequencialmente, de como seriam exploradas tais validações, solicitando em grande parte a construção de figuras ou materiais para posterior manipulação, comparação, explicitação de conclusões e convencimento de que a propriedade em questão era válida.

Nas provas teóricas, o que tivemos foi a elaboração (ou tentativa de elaboração) de uma prova por parte dos participantes e não de uma proposta de trabalho. A prova elaborada era tida pelos professores, muitas vezes, como sendo a forma a ser trabalhada pelo professor na sala de aula, e não de forma efetiva pelos alunos. Aos alunos, caberia a contemplação da elaboração da prova teórica realizada pelo professor.

Desde a primeira atividade, isto já se evidencia em algumas falas e permanece

durante várias outras, como vemos no quadro a seguir, com o recorte de alguns diálogos ocorridos com os trios durante o desenvolvimento das atividades.

2. Quadro 1 - Recorte de diálogos sobre as validações produzidas

Fragmentos de diálogos com os grupos	Observações
<p>Pesquisador: Vocês não acham que para os alunos deveríamos explicitar mais algumas passagens, será que assim já daria para compreender no contexto de ensino no ensino básico? [Questionando sobre a prova teórica apresentada pelo trio, esta não continha o motivo da congruência dos lados dos triângulos]</p> <p>PS1: A gente pensou só em provar.</p> <p>PI1: É que a gente fez uma formal para nós, não para os alunos. [...]</p>	<p>Diálogo com o trio 1 ocorrido durante a explicação da prova teórica realizada na atividade 1 (anexo no final do artigo) para o restante da turma em 25/04/2015.</p> <p>Indicações observadas: A prova teórica é de uso do professor não para ser elaborada pelos alunos.</p>
<p>Pesquisador: Tem que ver aí... então, como argumentar de uma maneira empírica para o aluno e como argumentar de uma maneira formal para o aluno?</p> <p>PJ4: A melhor forma é a formal. Só que o empírico eu acho mais fácil. Não sei se é porque eu tenho mais proximidade. Só que a empírica talvez eu pudesse recortar os retângulos e encaixar [indicando a intenção de encaixar as áreas hachuradas] ou construir um retângulo, cortar [separar a figura em partes, triângulos e retângulos] [...]</p>	<p>Diálogo registrado junto ao trio 04 em 13/06/2015 na realização da atividade 4.</p> <p>Indicações observadas:</p> <p>Reconhece a importância da prova teórica, mas indica mais facilidade e preferência pela prova empírica.</p>
<p>Pesquisador: Tá mais aqui, para trabalhar na sala de aula, este daqui [apontando para a empírica] ou este [apontando para a teórica].</p> <p>PI1: Sim, este daqui [apontando para a construção empírica].</p> <p>Pesquisador: E este daqui... daí, [apontando para a teórica produzida pelo grupo] você irá trabalhar com o aluno?</p> <p>PI1: Ah, sim, se ele trabalhar primeiro aqui [empírica], se ele [aluno] constrói, ele vê, aí eu consigo trazer a questão da congruência [referindo-se à prova teórica]. Por ser um retângulo, os lados são os mesmos, os lados paralelos são iguais, por isso eu posso construir [verificar a congruência] este triângulo (palavra não compreendida na transcrição) caso lado ângulo lado, aí eu consigo vir para cá e fazer isto daqui [prova teórica].</p> <p>Pesquisador: Tá, então lá na sua sala de aula, você iria deixar ele fazer esta parte [prova teórica]. Ele conseguiria fazer esta parte?</p>	<p>Diálogo registrado junto ao trio 1 sobre a atividade 5 em 04/07/2015.</p> <p>Indicações observadas: Admite poder trabalhar com a teórica e a empírica. Mas a empírica seria trabalhada pelos alunos, a teórica mais pelo professor "...ele constrói, ele vê, aí <u>eu</u> consigo trazer...aí <u>eu consigo</u> vir para cá e <u>fazer</u> isto daqui [prova teórica].</p> <p>Atribuem dificuldades aos alunos para trabalhar com a prova teórica, ficando o trabalho deles restrito às provas empíricas.</p>

<p>3. P11: Não, na minha sala hoje eu faria, os meus não conseguiriam, poderia até tentar, mas acho difícil [eles fazerem]. Eu prefiro que eles construam, façam a parte empírica e visualizem, aí eu vou lá e faço aqui [parte teórica]. (Incompreendido na transcrição) meus alunos... (Incompreendido na transcrição) às vezes, tá ali o desenho... é obvio, mas eles não conseguem. (Incompreendido na transcrição) Talvez eles escrevessem, mas com as palavras deles, o triângulo tal é igual ao triângulo tal porque o lado é igual, mas não assim formal, ah! Pelo caso [de congruência] assim, não. (Pausa) Por isso que as atividades que a gente faz eu gosto, porque tem a parte empírica, e a parte empírica eu conseguiria trabalhar. [...]</p> <p>4. Pesquisador: Então, na verdade, deixa eu só ver se entendi... então na sala de aula você acha que seria mais conveniente trabalhar com este modelo de cá [prova empírica com recortes, apresentada pelo grupo] do que o modelo de lá [prova teórica apresentada pelo grupo]? Daria para trabalhar com os dois?</p> <p>5. PM3: Dá para trabalhar com os dois, sempre começando com a empírica, depois você traduz isso para um rigor maior.</p> <p>6. Pesquisador: Tá, mas lá [prova teórica] a construção seria feita por eles [alunos] ou seria feita pelo professor?</p> <p>7. PM3: Ah, não! Aí o professor tem que entrar no circuito. [Gíria utilizada para dizer que este trabalho é mais do professor.]</p>	<p>Diálogo registrado no final da apresentação das duas provas, teórica e empírica, pelo trio 2, atividade 3 em 23/05/2015.</p> <p>Indicações observadas: Admite poder trabalhar com as duas, mas o aluno trabalha diretamente com a empírica, enquanto que o professor faz a prova teórica para a turma. Assim, para estes professores, a prova teórica pode, no máximo, ser apresentada para os alunos para que eles a contemplem.</p>
---	--

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos diálogos gravados durante o curso de extensão

Como vemos, de modo geral, estes diálogos indicam que a prova empírica é tida como a categoria principal para exploração das atividades na sala de aula, fazendo uma articulação com a teórica, que seria a forma do professor apresentar posteriormente para a turma, em cuja elaboração o aluno não assume um trabalho ativo.

Em geral, não sobressai a possibilidade de trabalho articulado com as duas categorias a serem realizadas pelos alunos. Esta possibilidade de trabalho articulado vem a aparecer em algumas falas durante discussões realizadas sobre tal possibilidade nas últimas atividades, o que destacamos como um avanço positivo que ocorreu a partir das discussões do curso. Mas ainda assim limitado a apenas dois momentos em dois grupos.

Outro elemento, que comprova a valorização das provas empíricas, destaca-se quando analisamos as respostas dadas ao item presente nas instruções que

questionava a possibilidade de trabalho com estas categorias, empírica e teórica de validação elaborada, nas atividades no contexto das salas de aula da educação básica. Em várias atividades, recebemos respostas indicando a valorização de adoção da prova empírica. O quadro a seguir ilustra mais algumas destas passagens.

Quadro 2 - Resumo de respostas indicando a valorização da prova empírica

<p>4) É possível trabalhar com uma atividade através dos conceitos de triângulos e retas paralelas, com materiais didáticos próprios para nos alunos, a construção da forma empírica, através da construção de triângulos e através deles fazer a construção dos vetores e ângulos e em seguida, sem fazer as construções de tudo o que eles observaram dos triângulos.</p>	<p>Trio 4 em 15/08/2015, atividade 7. Ênfase dada à construção da prova empírica.</p>
<p>introduzir uma atividade. Talvez a parte empírica, onde o aluno tenha contato direto com o tema, onde ele seja mais fácil de aprender, compreendendo que a parte formal é mais difícil.</p>	<p>Trio 3 em 25/04/2015, atividade 1. Retratam a parte empírica como mais fácil e a teórica como mais difícil.</p>
<p>Objetivo: Como forma empírica, pedimos que os alunos descrevam várias figuras geométricas com quatro lados e tracem todos os diagonais para que eles reconheçam e façam as comparações necessárias e tirem as conclusões sobre as figuras.</p>	<p>Trio 4 em 09/05/2015, atividade 2. Só destacam a empírica, conclusões tiradas sobre a figura.</p>
<p>2. A formal não seria possível e a empírica foi necessária adaptar o enunciado, já dando o desenho pronto e orientações para concluí-lo.</p>	<p>Trio 1 em 22/08/2015, atividade 8. Exclui a possibilidade da teórica e a construção da figura na empírica.</p>
<p>Quanto a essa atividade pedimos que com os dados apresentados no texto, os alunos façam estabelecimentos, não foi o entendimento por parte dos alunos. Já relacionado a solução formal, dificilmente o aluno conseguia encontrar a solução para o problema proposto.</p>	<p>Trio 2 em 13/06/2015, atividade 4. O trio atribuiu às medidas dos segmentos que compõem os retângulos para os alunos calcularem as áreas.</p>

Fonte: Elaborado pelos autores a partir das respostas dos grupos

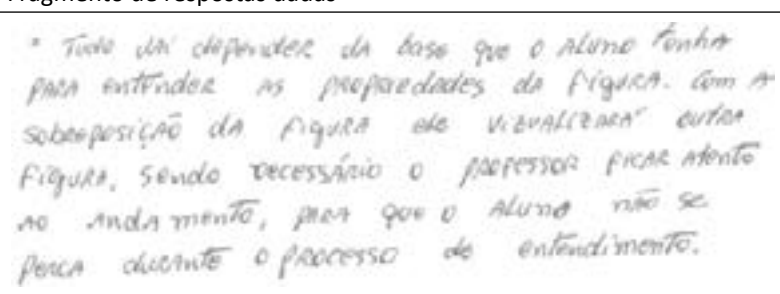
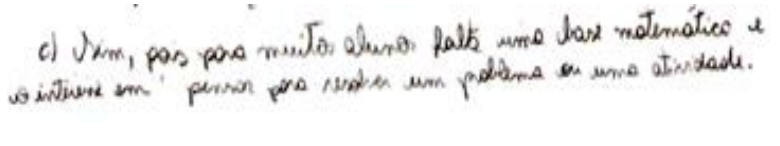
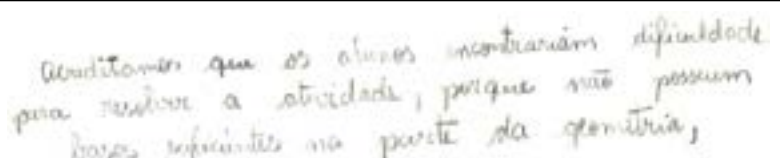
Percebendo esta valorização dada às provas empíricas durante a realização do projeto com os professores, foi aplicado um questionário a eles no final do curso a fim de confirmar certas percepções: a impressão obtida sobre esta valorização foi confirmada pelos participantes que entregaram o questionário respondido.

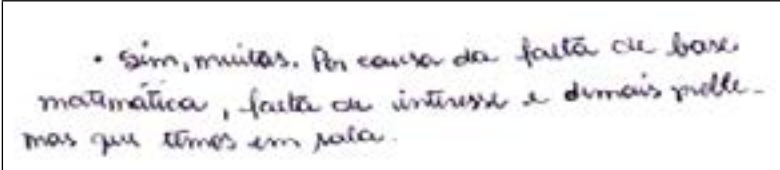
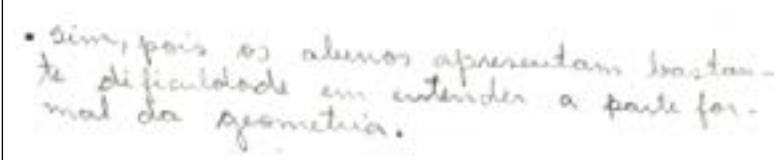
[...] aos alunos, deixamos a construção empírica e apenas apresentamos a formal [teórica], já explicada e não para que eles construíssem” (parte da resposta de um membro do trio 1).

Sua percepção está correta. Procurávamos transpor para a forma empírica de modo a facilitar a visualização e compreensão por parte dos alunos (parte da resposta de membro do trio 2)

Um fato importante que sobressai nesta valorização das provas empíricas por parte dos professores envolvidos na pesquisa, diz respeito às dificuldades atribuídas ao trabalho com as provas teóricas. Na maioria das vezes estas dificuldades não estão relacionadas à compreensão da Matemática, mas sim a problemas relacionados ao aluno e à sala de aula, como podemos ver no quadro 03, elaborado a partir das respostas dadas à questão: se ele [professor] julgava que os alunos teriam dificuldades em resolver esta atividade e por que motivo.

Quadro 3 - Fragmento de respostas dadas às possíveis dificuldades que poderiam ser encontradas por parte dos alunos nas atividades propostas

Fragmento de respostas dadas	Observações
	<p>Trio 3 – Atividade 2</p> <p>Observação: A dificuldade é atribuída à problemas de base matemática apresentada pelo aluno e indica a necessidade de acompanhamento do professor.</p>
	<p>Trio 4 – Atividade 1</p> <p>Observação: As dificuldades atribuídas aos alunos se devem à falta de base e de interesse.</p>
	<p>Trio 2 – Atividade 5</p> <p>Observação: A dificuldade é atribuída a problemas do aluno: falta de base em Geometria.</p>

	Trio 1 – Atividade 1 Observação: As dificuldades são atribuídas aos alunos: falta de base, interesse e problemas de sala de aula.
	Trio 1 – Atividade 5. Observação: As dificuldades em entender a parte formal podem ser entendidas como falta de base.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir das respostas dos trios

O que percebemos de interessante e que merece ser destacado é o fato de que os professores não comentam sobre possíveis dificuldades apresentadas por eles mesmos, observando que são evidenciados apenas problemas relativos aos alunos na maioria das dificuldades mencionadas.

O fato de atribuir aos alunos as dificuldades de realização das atividades e consequentemente os problemas de aprendizagem, também desponta em outros estudos relativos à educação básica brasileira. O Instituto Ayrton Senna, em estudo realizado a partir das respostas dos professores do Ensino Fundamental de escolas estaduais e municipais na Prova Brasil de 2013, constatou que “a maior parte dos professores de escolas públicas aponta o desinteresse e a falta de esforço dos alunos como principais causas para os problemas de aprendizagem” (INSTITUTO AYRTON SENNA, 2015). Este fato não é apenas um problema de realidade local constatado em nossa pesquisa, mas sim um problema nacional.


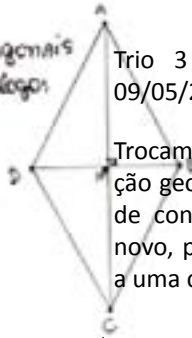
Contudo, valorizar a utilização apenas de provas empíricas, desvalorizando a exploração de provas teóricas, tendo como base uma visão, muitas vezes equivocada, que se tem sobre os alunos, de falta de base, desinteresse e falta de criatividade, pode não contribuir com uma possibilidade de dispor de mecanismos que visem melhorar a aprendizagem dos alunos, tornando-os mais ativos no processo de construção do conhecimento. Além disso, pode “esconder”² outros problemas, como a deficiência na própria formação dos professores.

Este problema desponta ainda mais quando olhamos para as provas teóricas

2 Na verdade não esconde, mas sim põe em evidência este problema.

produzidas pelos professores, pois estas, em sua grande maioria, continham equívocos. Os erros conduzem essas validações produzidas a não se caracterizarem como demonstrações do ponto de vista matemático. Destacamos algumas provas e suas inconsistências no quadro que segue.

Quadro 4 - Alguns erros cometidos nas provas teóricas elaboradas nas atividades do curso

Prova teórica elaborada	Observações sobre os equívocos presentes na prova
<p><u>Formal:</u></p> <p>Para definição de paralelogramo são 2 pares de lados opostos e os ângulos opostos são congruentes. Suas diagonais são bissetrizes dos ângulos e se encontram e possuem a mesma medida. Logo as 4 bissetrizes são "em ponto médio".</p> <p>Por casos que não são paralelogramos possuem ângulos diferentes, logo suas diagonais não são bissetrizes e o encontro de ambas não é de fato o mesmo.</p>	<p>Trio 1 – Atividade 2 – produzida em 09/05/2015.</p> <p>Começa com uma definição (inchada) contendo mais propriedades que o necessário. Usa, de forma equivocada, o argumento de que “as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes”. Isso só se verificaria, de fato, em um quadrado ou losango, e não em um retângulo ou um paralelogramo qualquer. Além de afirmar que elas “possuem a mesma medida”, o que é falso.</p>
<p><u>5º passo formal</u></p> <p>2º) Se M é o ponto médio dos segmentos AB e CD, logo $CM = MD = MB = MA$ não iguais. $\triangle CMA = \triangle MBD$, usando assim as propriedades dos triângulos isósceles, concluímos assim $CA = BD$.</p> 	<p>Trio 4 – Atividade 7– produzida em 15/08/2015.</p> <p>Atribui, equivocadamente, a existência de congruência entre os segmentos CM e AM, BM e DM. Esta congruência não está no enunciado da atividade. O argumento utilizado de que $CA = BD$, pelo fato de os triângulos serem isósceles, não é válido, mesmo garantindo a congruência entre os lados. Não foi explicitado que o ângulo em M é congruente, nem o caso de congruência LAL.</p>
<p><u>apresentação formal:</u></p> <p>Temos um paralelogramo $ABCD$, cuja diagonais intersectam em um ponto médio M, logo:</p> <p>$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$, mas $\overline{AM} = \overline{MB}$</p> <p>$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{AM} \Rightarrow \overline{AB} = 2\overline{AM} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.</p> <p>Analogamente fazemos \forall outra diagonal.</p> 	<p>Trio 3 – Atividade 2 – produzida em 09/05/2015.</p> <p>Trocamos a localização de C e B na representação geométrica. A prova apresentada, além de conter vários erros, não chega a algo novo, progride de modo circular, chegando a uma conclusão equivocada.</p>

<p><u>Solução formal</u></p> <p>Seja o $\triangle ABC$ cortado pela semi-reta AM, formando o segmento médio entre AB e AC paralelo entre BC formando o $\triangle AMN$ e o trapézio $MNBC$.</p> <p>Pela definição de trapézio temos que é um quadrilátero com 1 par de paralelas.</p> <p>Podemos afirmar então que $MNBC$ o triângulo ABC é semelhante ao $\triangle AMN$</p>	<p>Trio 01 – Atividade 3 - produzida em 23/05/2015.</p> <p>Apenas afirmam que o triângulo original ABC é formado por um triângulo menor AMN e um trapézio $MNBC$, ou seja, nenhuma propriedade é enunciada para justificar que $MNBC$ é, de fato, um trapézio, apenas a impressão visual que tem sobre a figura é utilizada para sustentar a conclusão.</p>
---	---

Fonte: Elaborado pelos autores a partir das provas teóricas produzidas no curso de extensão

Antes de prosseguirmos, um esclarecimento se faz necessário. O que em cada imagem no quadro anterior foi chamado pelos professores durante a pesquisa de solução formal, apresentação formal ou simplesmente de formal, diz respeito ao que enquadrámos posteriormente no trabalho de pesquisa como as provas teóricas, assim aqui, sem prejuízo, podem ser entendidas como sinônimos de prova teórica.

Expostos estes fatos, o que chama a atenção é o grande número de equívocos apresentados nas tentativas de elaboração destas provas teóricas. De modo geral, elas apresentaram: erros de empregos de proposições matemáticas, erros de argumentos, além da adoção de afirmações como verdadeiras sem comprovação teórica, com base apenas na impressão visual, obtida da representação figural explorada naquele momento.

Outro fato a ser destacado neste contexto é que, mesmo nas atividades em que uma validação teórica era construída de forma correta, isso não levava os professores a propor um trabalho para a sala de aula, visando explorá-la. Esse fato nos sugere que outros elementos, além da formação do professor, também influenciam no cenário de desvalorização da utilização de provas contendo deduções teóricas.

4. Discussões e reflexão sobre o cenário encontrado

A falta de enfoque, em sala de aula, para as provas teóricas, como constatamos acima, exige uma reflexão no sentido de que esse fato pode tornar-se prejudicial ao

processo de aprendizagem dos alunos, como destaca Pietropaolo (2005, p. 206):

Estudos referenciados indicam, de modo geral, que a não proposição de provas nas aulas de Matemática pode significar erro de representação do papel e da natureza da prova matemática. Além disso, sugere que essa ausência pode privar os alunos de uma educação mais ampla.

Em um sentido mais extremo, o abandono da validação teórica no contexto da sala de aula afasta o aluno da oportunidade de contato com a forma de estruturação matemática como ciência dedutiva, além de possibilitar o desenvolvimento de uma visão de Matemática voltada à memorização e aplicação de fórmulas prontas.

A utilização de provas que visem articular teorias matemáticas, chegando o mais próximo possível de uma demonstração no ambiente escolar, como é o caso das provas teóricas aqui defendidas, permite aos alunos compreender o processo de construção e obtenção de certas fórmulas e conceitos, podendo assim avançar frente à visão reducionista construída pelos alunos acerca da Matemática: " [...] muitos [alunos] encaram a Matemática como um produto pronto e acabado: uma análise segue uma síntese formalizada e o resultado é apresentado como matemática pronta" (FONSECA, 1992, p. 34).

Pensando no fato de que, não trabalhar com as provas teóricas efetivamente em sala de aula foi atribuído a problemas relativos aos próprios alunos, e com o agravamento dos erros cometidos pelos professores na construção de suas provas teóricas, somos levados a considerar o processo de formação dos professores de Matemática.

Levando em consideração a formação dos professores envolvidos na pesquisa, todos licenciados em Matemática, a maioria com, ou fazendo, pós-graduação *lato sensu*, além de ser um grupo bem heterogêneo em relação ao tempo de docência e à formação, variando de um ano a mais de vinte e cinco anos de atuação no magistério, avaliamos que encontrar tantos equívocos nas provas teóricas elaboradas não era esperado e nos convida a uma reflexão. Um dos fatores que parece contribuir fortemente, neste caso, é a formação de professores em Matemática, em especial na área de Geometria, que, como vimos neste artigo, ainda apresenta problemas.

O modelo de formação de professores, no tocante à Geometria, há tempo vem sendo questionado como um dos elementos influentes no atual ensino deste ramo da Matemática. Almouloud *et al.* (2004), ao investigarem questões relativas ao ensino de Geometria no Ensino Fundamental, analisando o sistema educativo, o discurso de professores e elementos que envolvem a própria Geometria, identificam “certos fatores que podem ser considerados origens de dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e de aprendizagem de saberes e de conhecimentos geométricos (ALMOULOUUD *et al.*, 2004, p. 99)”. Os fatores identificados estão relacionados à formação dos professores, à estrutura do próprio sistema educativo e à influência do livro didático, como também já destacamos na parte anterior deste artigo. Especificamente sobre a formação do professor, é destacado pelos autores que:

Podemos apontar, em relação à formação dos professores, que esta é muito precária quando se trata da Geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da Matemática. Por sua vez, a formação continuada não atende ainda aos objetivos esperados em relação à Geometria. Assim a maioria dos professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio não está preparada para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCNs (ALMOULOUUD *et al.*, 2004, p. 99).

As fragilidades que encontramos nas construções apresentadas pelos professores nos remetem também a concordar com as constatações apresentadas pelos autores. Assim, a realidade de uma formação que, muitas vezes, compromete o bom desenvolvimento de suas práticas já vem sendo questionada por pesquisadores da comunidade acadêmica e necessita urgentemente de esforços e adoção de políticas públicas que visem a mudança desse quadro.

Sobre a formação, destacamos o quão necessário é haver uma preocupação com a formação consistente dos conhecimentos matemáticos por parte dos professores, pensando em um ensino que vise à construção de argumentação matemática e conseqüente construção de provas e de algumas demonstrações. Sem esta construção adequada, o trabalho fica seriamente comprometido, como têm apontado os longos estudos realizados por Maher (1998, p. 15):

Sob condições que enfatizam o pensar na aprendizagem, alunos (desde crianças pequenas até adultos) podem e realmente elaboram argumentos convincentes. O conhecimento necessário para ensinar Matemática do ponto de vista do desenvolvimento de significado matemático nos alunos requer que os professores possuam um entendimento profundo da Matemática que se espera que eles ensinem, que eles continuem a construir entendimentos do desenvolvimento cognitivo de crianças naquelas áreas.

Almouloud *et al.* (2012, p. 39) destacam em seu trabalho que “a nossa realidade de sala de aula do ensino básico em escolas públicas ainda está distante desse patamar de estudo de demonstrações”, indicando que, para o real e necessário trabalho com práticas de demonstração no ensino básico, é necessário rever a formação inicial e focar trabalhos com os professores em formação continuada, na linha de valorização desse tema. Sem este aprofundamento dos conhecimentos matemáticos na formação, um trabalho efetivo em sala de aula, buscando aproximar as provas empíricas das teóricas fica fragilizado, especialmente quando cabe ao professor realizar esta tarefa.

No entanto, aprimorar a formação destes conceitos matemáticos perpassa por muitos caminhos e instâncias, mas sem dúvida o principal está na melhoria do próprio ensino de Geometria, para que depois os outros elementos novamente se alinhem.

5. Conclusões

Um ensino de Geometria eficaz necessita ser pensado, de forma a dar sentido a problemáticas cotidianas, possibilitando manipulações concretas e empíricas, mas sem perder de vista as bases teóricas e os alicerces da ciência Matemática. Assim planejado, sem dúvida o ensino da Geometria tem muito a contribuir na formação de cidadãos conscientes, críticos e especialmente entendedores da importância da matemática em nosso cotidiano.

A prática encontrada, ao olharmos as produções de propostas para trabalhar com validações empíricas e teóricas, infelizmente não visa aproximar as práticas empiristas experimentais das argumentativas dedutivas, valorizando apenas o

primeiro extremo desta relação geralmente apoiadas em elementos superficiais que não se sustentam na prática.

Ao mesmo tempo, os elementos encontrados na pesquisa, refletem muito o cenário do ensino de Geometria desenhado por muitas pesquisas, que a longa data denunciam a desestruturação do ensino deste ramo da Matemática, e que, na prática, como o tempo e os resultados de pesquisas indicam, têm encontrado muitas dificuldades para modificações de fato.

Embora a realidade encontrada na pesquisa tenha apontado o despreparo dos professores no que concerne à possibilidade de articulação das duas categorias de provas, no trabalho efetivo da sala de aula, acreditamos que investir na formação continuada de professores desponta, tanto do ponto de vista teórico quanto prático, como um elemento que pode favorecer a busca de um equilíbrio entre os extremos empirista e dedutivo, que como vimos necessitam desta aproximação em prol de um ensino de Geometria mais expressivo.

Assim, a nosso ver, o cenário encontrado continua a indicar uma real necessidade de buscarmos cada vez mais realizar estudos e discussões sobre a real importância da abordagem destes elementos, teóricos e empíricos, nos processos de formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto continuada, especialmente no que tange o ensino de Geometria.

Referências

- ALMOULOU, S. A.; et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**. n.27, p. 94-108, 2004.
- _____. Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.1, n.3, 2012.
- ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria. In **Anais do ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**, Caxambu, 2004.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.
- CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de Matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Revista Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, 2008.
- FONSECA, M. C. F. R. Heurística e Educação Matemática. **Educação Revista**, Belo Horizonte, v. 16, p. 31-38,

1992.

GRANDO, R. C.; et al. Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, 2008.

IMENES, L. M. A Geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva? **Revista de Ensino de Ciências**, n. 19, p. 55-61, 1987.

INSTITUTO AYRTON SENA. **Pobreza e comportamento influenciam visão do professor sobre aprendizagem**. 2015. Disponível em: <<http://www.institutoayrtonsenna.org.br/todas-as-noticias/comportamento-influencia-visao-professor-sobre-aluno/>>. Acesso em: 19 Jan. 2016.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista – SBEM**, n. 4, 1º semestre, p. 3-13, 1995.

MAHER, C. A. **Professores podem ajudar seus alunos a construir argumentos convincentes?** Um breve exame desse processo. Rio de Janeiro (RJ): MEM/USU, 1998.

NACARATO, A. M. A. Geometria no Ensino Fundamental: fundamentos e perspectivas de incorporação no currículo das séries iniciais. In: SISTO, F. F.; DOBRÁNSZKY, E. A.; MONTEIRO, A. (org.) **Cotidiano escolar: Questão de leitura matemática e aprendizagem**. Petrópolis (RJ): Vozes, 2002, p. 84-99.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. 2000. Disponível em: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em: 20 Jan. 2015.

_____. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2005.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis, SC, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013.

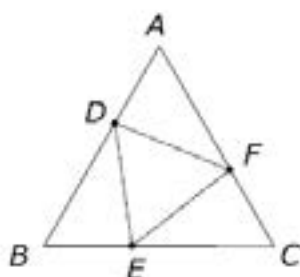
TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a Articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública**. 2016. 257 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2016.

ANEXO

ANEXO 1 - Atividades geométricas trabalhadas presencialmente com os professores

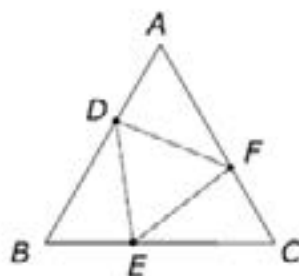
Atividade 1 – Trabalhada no projeto em 25/04/2015

Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero. Sejam os pontos D , E e F sobre os lados desse triângulo tal que: , podemos garantir que o triângulo DEF é classificado como equilátero, escaleno ou isósceles? Como fazer isso?



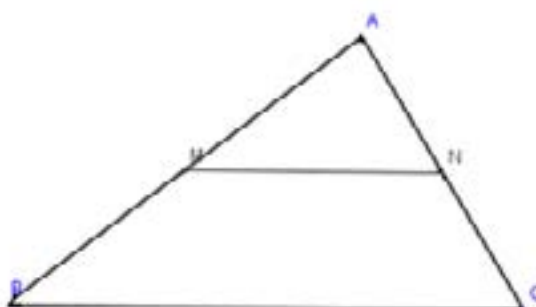
Atividade 2 - Trabalhada no curso em 09/05/2015

Todo quadrilátero cujas diagonais se dividem ao meio será sempre um paralelogramo? Qual seria a recíproca dessa proposição? Ela também é verdadeira?



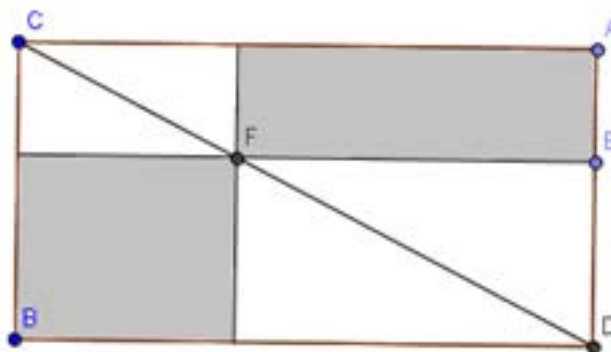
Atividade 3 – Classe 2 - Trabalhada no curso em 23/05/2015

Na figura abaixo, considere ABC um triângulo qualquer em que M é ponto médio de AB e N é ponto médio de AC . Nessa situação, o que é possível afirmar sobre MN em relação a BC ?



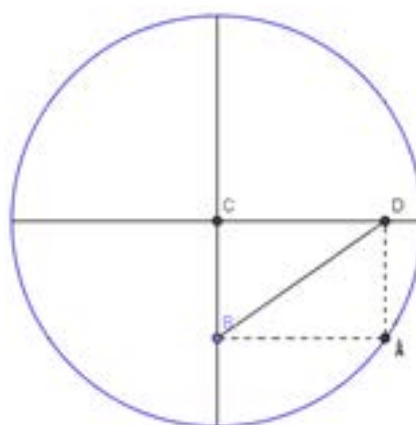
Atividade 4 – Trabalhada no projeto em 13/06/2015

Na figura abaixo, por um ponto na diagonal foram traçados dois segmentos de reta paralelos aos lados de um retângulo. O que é possível afirmar sobre as áreas dos retângulos hachurados na figura?



Atividade 5 – Trabalhada no projeto em 04/07/2015

Na figura a seguir, temos um círculo de raio conhecido e um retângulo ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a medida do segmento BD?

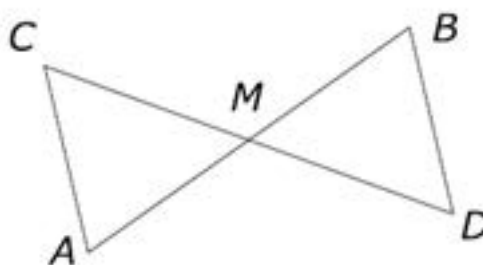


Atividade 6 – Trabalhada no projeto em 01/08/2015

Dado um quadrilátero qualquer de vértices ABCD e sejam os pontos M, N, O e P os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC, CD e DA, nessas condições, o que podemos afirmar sobre o quadrilátero com vértices MNOP?

Atividade 7 – Trabalhada no projeto em 15/08/2015

Na figura, dois segmentos AB e CD se interceptam no ponto M tal que: $CM \equiv MD$ e $AM \equiv MB$. O que podemos afirmar sobre os segmentos AC e DB que ligam as extremidades dos segmentos AB e CD ?



Atividade 8 – Trabalhada no projeto em 22/08/2015

Sejam os pontos O , B e C não colineares. Seja I meio de BC e seja D um ponto tal que o quadrilátero $OBID$ seja um paralelogramo. Seja M o ponto de interseção entre OC e ID . O que podemos afirmar sobre M ? Justifique.

Atividade 9 – Trabalhada no projeto em 29/08/2015

Seja $ABCD$ um paralelogramo, sendo I o ponto de interseção das diagonais; seja E o ponto médio de BC e F o ponto médio de DC , conforme figura abaixo. Os segmentos AC e EF são concorrentes em M , o que é possível afirmar sobre M em relação a EF e IC ?

