REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº 1 - jan/jun - 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

V6 - Nº1, Jan-Jun 2017

UEPB Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Antônio Guedes Rangel Júnior- Reitor

Prof°. Dr. Flávio Romero Guimarães- Vice-Reitor

eduepb Editora da Universidade Estadual da Paraíba

Prof°. Dr. Luciano Nascimento Silva- Diretor

Coordenação de Editoração: Arão de Azevedo Souza

Capa e Editoração Eletrônica: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Ilustração da capa: Carlos Alberto de Araujo Nacre

Comercialização e Divulgação: Júlio Cézar Gonçalves Porto

Zoraide Barbosa de Oliveira Pereira

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

410

R454 Revista Educação Matemática em Foco - 2017 - Campina Grande: EDUEPB

V6 - Nº 1 - Jan/Jun. - 2017

Semestral

Editora: Kátia Maria de Medeiros

ISSN - 1981.6979

1. Formação de Professores. 2. Geometria. 3. Ensino-aprendizagem de Matemática. Pensamento geométrico 5. Interdisciplinaridade 6. Prova e demonstração em Geometria Plana. 27. ed. CDD

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - Filiada a ABEU
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br - email: eduepb@uepb.edu.br

A ARTICULAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DE MEDIDAS DE VOLUME

Maria José Ferreira da Silva

Cecília Gaita

Jesus Victoria Flores Salazar

SUBMISSÃO: 18 de abril de 2017

ACEITAÇÃO: 04 de maio de 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

A ARTICULAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DE MEDIDAS DE VOLUME

The Articulation between Geometry and Algebra in the Construction of Formulas for the Calculation of Volume Measures

Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP
maze.fsilva@gmail.com

Cecília Gaita – PUC-Peru
cgaita@pucp.edu.pe

Jesus Victoria Flores Salazar – PUC-Peru
jvflores@pucp.edu.pe

RESUMO

Este artigo objetiva uma reflexão a respeito do ensino de volume a partir dos processos de algebrização e modelização. Sugere o estudo de álgebra a partir de problemas intra ou extra matemáticos que privilegiem a utilização de parâmetros e o raciocínio funcional. A atividade analisada fez parte de um projeto de formação de professores em álgebra escolar realizado em colaboração pela PUC-SP e PUC-Peru, envolvendo os grupos de pesquisa PEA-MAT e DIMAT, respectivamente. O projeto se baseia no processo de algebrização de Bolea e no processo de modelização proposto por Munzón, Bosch e Gascón, a partir de trabalhos de Chevallard. Como metodologia, utilizamos a pesquisa-ação. Os resultados mostraram que os professores, dos dois grupos, estão fortemente habituados a um trabalho apenas com cálculo algébrico, em detrimento de outros, como é o caso do desenvolvimento de fórmulas para o cálculo de medidas de volume.

Palavras chave: Algebrização. Modelização. Volume.

ABSTRACT

This article aims to reflect on the teaching of volume from algebrization and modeling processes. It suggests the study of algebra from intra or extra mathematical problems that favor the use of parameters and the functional reasoning. The activity analyzed was part of a teacher training project in school algebra carried out in collaboration by PUC-SP and PUC-Peru, involving the research groups PEA-MAT and DIMAT, respectively. The project is based on the Bolea algebrization process and the modeling process proposed by Munzón, Bosch and Gascón, based on works by Chevallard. As a methodology, we use action research. The results showed that the teachers of the two groups are heavily used to work with algebraic calculus, to the detriment of others, such as the development of formulas for the calculation of volume measures.

Key-words: Algebrization. Modeling. Volume.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho temos por objetivo fazer uma reflexão a respeito do ensino de volumes no Ensino Médio a partir de uma atividade discutida durante uma formação de professores de Matemática no Projeto Processos de Ensino e de Aprendizagem de Álgebra - PEA-MAT, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/Brasil e Didáctica de las Matemáticas – DIMAT, da Pontifícia Universidade Católica do Perú.

Dentre os vários objetivos desse projeto, um deles focou no ensino de álgebra a partir de parâmetros a partir um problema intra matemático no campo da geometria, como sugerido por Chevallard (1984, 1989, 1990). O ensino de volumes vem sendo tratado como mera aplicação de fórmulas para o cálculo de sua medida a partir de figuras simples e amplamente conhecidas como, mais recentemente, nos apresentam Freitas e Bittar (2016), quando analisam o ensino de volume em livros didáticos. Por outro lado, Morais (2013) aponta que o ensino de volume deve ser tratado no campo das grandezas e não da geometria, mas de maneira que articule os quadros geométrico, numérico e das grandezas como proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) a respeito do ensino de áreas. Assim, estas autoras identificam o quadro geométrico como constituído de figuras geométricas espaciais (pirâmides, esferas, ...); o quadro numérico, composto de números reais positivos e o quadro das grandezas constituído por classes de equivalência de sólidos de mesmo volume. Justificam a distinção entre os quadros porque há sólidos diferentes de mesmo volume (mantém a grandeza) que podem ter medidas diferentes dependendo da unidade escolhida.

Concordando com esse ponto de vista acrescentamos, quanto ao ensino de álgebra, as afirmações de Chevallard (1989), quando aponta que o abandono do emprego de parâmetros, do desenvolvimento de fórmulas e do trabalho com função como a principal causa de dificuldades tanto para o ensino, quanto para a aprendizagem de álgebra. Para o autor "o emprego de parâmetros remete à um lugar central, desde o nível mais elementar dos estudos matemáticos, à noção de fórmula [...] imediatamente ligada à noção de função". Gascón (1995), no mesmo sentido, afirma que a álgebra não deve se ater apenas a problemas aritméticos, mas ao estudo de campos de problemas que envolvam outras áreas da matemática, como é o caso da Geometria e do desenho geométrico.

Alguns trabalhos vêm apresentando novos caminhos para o ensino de Geometria espacial e volumes de sólidos. Um deles é o de Almeida (2010) que sugere o trabalho com os sólidos arquimedianos, via truncatura, utilizando o Cabri 3D que possibilitaria seu ressurgimento, como alternativa ao trabalho apenas com os clássicos apresentados nos livros didáticos. A partir da construção do cuboctaedro, Silva e Almouloud (2013) analisam uma organização didática para o estudo de seu volume partindo de truncaturas de um octaedro regular. Assim, tomamos a atividade apresentada por esses autores, sob outro ponto de vista, para uma reflexão no sentido de observar os níveis de algebrização e modelização que ela favorece, apresentando alguns resultados da aplicação dessa atividade em duas formações de professores, uma em São Paulo e outra em Lima, no Peru, no âmbito do projeto mencionado acima.

A SITUAÇÃO

A situação que pretendemos analisar, baseada incialmente em Almeida (2010) e depois em Silva e Almouloud (2013), tem a diferença de que não partiremos de um cuboctaedro obtido de um octaedro, mas da construção desse sólido tendo um cubo qualquer como base. A primeira atividade (1) solicitava o cálculo da medida do volume de um poliedro obtido de um cubo de aresta medindo 4 cm do qual se retirou uma pirâmide por um corte a partir do ponto médio de três arestas que partem de um único vértice, como mostra a figura 1.

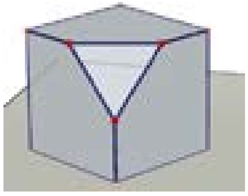

Figura 1. Poliedro obtido de um cubo por truncatura

A solução dessa atividade supõe apenas cálculos aritméticos a partir da utilização das fórmulas para o cálculo da medida do volume de um cubo e de uma pirâmide e seria: $V_C = 4 \times 4 \times 4 = 64$, em que V_c representa a medida do volume do cubo.

$V_P = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2\right) = \frac{4}{3}$ em que V_p representa a medida do volume da pirâmide.

$V_S = 64 - \frac{4}{3} = \frac{192-4}{3} = \frac{188}{3}$ em que V_s representa a medida do volume do sólido obtido pela truncatura.

A atividade seguinte (2) solicitava o mesmo cálculo para a figura gerada por um cubo de aresta medindo *a*.

Solução: $V_C = a \times a \times a = a^3$

$$V_P = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{48}$$

$$V_S = a^3 - \frac{a^3}{48} = \frac{48a^3 - a^3}{48} = \frac{47a^3}{48}$$

Na sequência (3) solicitamos a retirada das pirâmides a partir dos oito vértices do cubo. A figura gerada por essa truncatura é chamada de cuboctaedro.

$V_K = a^3 - 8 \times \frac{a^3}{48} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{6a^3 - a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$ em que V_k representa a medida do volume de um cuboctaedro. Obtivemos, então, uma fórmula para o volume do octaedro em função da medida a da aresta que o gerou.

Mas esta fórmula não nos permite calcular a medida do volume de um cuboctaedro qualquer e, por isso, propusemos a atividade seguinte (4), ou seja, questionamos primeiro se as arestas do cuboctaedro têm mesma medida. A resposta é sim, pois todas representam hipotenusas de triângulos retângulos de catetos que medem a/2. Assim se representarmos por *x* a medida da aresta do novo sólido teremos que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

De onde vem que se $2x^2=a^2$ e, portanto, $x=(a\sqrt{2})/2$.

Logo, obtemos o valor de a em função de *x*, ou seja . Com este resultado solicitamos a fórmula para o cálculo de um cuboctaedro qualquer que tenha medida de aresta dada por *x*, ou seja, $V_{cuboctaedro} = \frac{5}{6}\left(x\sqrt{2}\right)^3 = \frac{5}{6}x^3 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{6}x^3 = \frac{5\sqrt{2}}{3}x^3$ Essas atividades podem gerar outras, como por exemplo, (5) dado um cuboctaedro de medida de volume $264cm^3$ determine a medida da aresta do cubo que o gerou. Ou ainda, (6) desenvolva uma fórmula para o cálculo do volume de um cubo truncado que é obtido por truncatura de pirâmides, considerando que as arestas do cubo foram divididas em três partes de mesma medida, como mostra a figura 2.

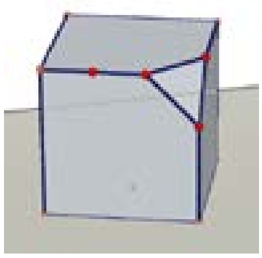

Figura 2. Outro poliedro obtido de um cubo por truncatura

O REFERENCIAL E A ANÁLISE

Partindo de vários estudos, iniciados por Chevallard em 1989, Munzón, Bosch e Gascón (2010, 2015), apresentamos as três etapas do processo de algebrização escolar, interpretando, em um primeiro momento, a álgebra como uma ferramenta que permite a modelização de todas as áreas da matemática. Para os autores o ponto de partida de tal processo requer um sistema inicial para ser modelizado que agrupa programas de cálculo (PC), quer dizer, uma sequência de operações aritméticas que se pode efetuar "passo a passo".

A **primeira etapa** do processo de algebrização consiste, então, em considerar o programa de cálculo como um todo e não apenas como um processo que traduz a reformulação retórica do programa de cálculo para uma formulação escrita. Essa etapa não implica, necessariamente, no uso de letras para representar números, mas na hierarquia das operações e nas normas para uso de parênteses que fazem surgir um novo discurso tecnológico-teórico que inclui a noção de expressões algébricas e programas de cálculo equivalentes. Munzon, Bosch e Gascón (2011, p. 750), apresentam como exemplo o seguinte problema: "Um triângulo isósceles está inscrito em uma circunferência de raio 6 cm. Se a altura relativa ao lado desigual do triângulo mede 9 cm, quanto vale a área do triângulo?" Esse problema pode ser resolvido retoricamente por um discurso apoiado por uma figura: "se subtraímos o raio da medida da altura relativa ao lado desigual, obtemos um segmento de 2,625 cm, como mostra a figura; utilizando o teorema de Pitágoras, temos que a metade do lado desigual do triângulo é A medida da área será determinada multiplicando essa medida pela altura, ou seja, cm^2.

Outro exemplo, para essa etapa, é apresentada pelos autores com uma modificação do problema acima para que a solução aritmética não seja possível e apareça a necessidade da explicitação do processo de resolução por meio da escrita com letras, por meio de uma equação, e da simplificação. Este é o problema: "Um triângulo isósceles está inscrito em uma circunferência e a altura relativa ao lado desigual do triângulo mede 3/2 do raio da circunferência. Como a área do triângulo depende do raio da circunferência circunscrita?" (Ibid, p. 752). A solução obtida é , ou seja, "a área do triângulo é o valor do raio da circunferência circunscrita ao quadrado multiplicado por , dividido por quatro.”

Como a situação que trabalhamos requer, em suas atividades, a manipulação de expressões algébricas para obter outras equivalentes esta primeira etapa estaria incluída.

Para passar para a **segunda etapa** de algebrização é necessário buscar situações em que as técnicas de simplificação ou expressão de um PC não sejam suficientes para resolver o problema, ou seja, os dados e a incógnita aparecem como relação entre as variáveis e são caracterizadas por uma igualdade entre dois PC. Nesse caso, o cálculo torna-se mais complexo e as equações seriam consideradas como um novo objeto matemático o que implicaria em novas técnicas como a de cancelamento e a busca de equações equivalentes.

Munzon, Bosch e Gascón (2011, p. 754) apresentam como exemplo: “Dois triângulos isósceles estão inscritos respectivamente em circunferências de raios R_1 e R_2. Sabe-se que a altura (relativa ao lado desigual) do segundo é o dobro da correspondente altura do primeiro e o raio da segunda circunferência excede em 1 cm ao raio da primeira. Se os dois triângulos têm a mesma área, que relação há em cada caso entra a altura do triângulo e o raio da circunferência circunscrita?”. Afirmam que, denominando as alturas por h_1 e h_2, o primeiro programa de cálculo é representado por e o segundo por . Utilizando as relações dadas no enunciado, e , concluem que “para o primeiro triângulo temos que a relação entre a altura e o raio é e a relação para o segundo triângulo é .

Para Munzon, Bosch e Gascón (2010a), geralmente, esse é o modelo dominante da álgebra escolar, isto é, fazer a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e então para a resolução de equações com uma incógnita. Em nossas atividades consideramos que a primeira parte da atividade (4) estaria enquadrada nesta etapa, porque solicita a relação entre x e *a*, em que *a* seria um parâmetro. A segunda parte dessa atividade já se enquadraria na terceira etapa do processo de algebrização.

No entanto, os autores propõem um modelo mais amplo, considerando relações entre programas com várias variáveis que encaminham à **terceira etapa** do processo de algebrização. Esse se dá quando não se limita o número de variáveis e a distinção entre parâmetros e incógnitas desaparece o que possibilita a ampliação dos conhecimentos do sistema modelizado com o estudo de questões problemáticas que não podem ser discutidas no sistema. Acrescentam que os programas de cálculo dessa etapa podem ser interpretados como "fórmulas" ou modelos algébricos de um sistema matemático ou extra matemático.

Munzón, Bosch e Gascón (2011, p. 756) apresentam como um exemplo dessa etapa as seguintes questões: "Se pode determinar um triângulo isósceles por sua área A e a medida c dos lados iguais? Quanto mede o raio R da circunferência em que se inscreve o triângulo? Como depende R da variação conjunta dos lados b e c?" Consideram que são questões que conduzem à "fórmulas" difíceis de serem analisadas apenas por técnicas algébricas.

É nesta etapa que se enquadra nossa situação, pois procuramos uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro a partir da medida de sua aresta em um sistema matemático que trata do cálculo de medidas de volume. Entendemos que essa situação possa ser aplicada no Ensino Médio e por isso se supõe que o aluno já tenha passado por todo o processo de algebrização e possa mobilizar conhecimentos a respeito do cálculo da medida do volume de cubos e pirâmides. No entanto, podemos dizer que a primeira atividade poderia ser resolvida retoricamente por *calcular a medida do volume do cubo que dá 64 cm³, depois calcular a medida do volume da pirâmide que foi retirada que é um terço da metade de duas vezes dois* que poderia ser escrita como já apresentado acima. A partir do conhecimento das fórmulas, o trabalho é essencialmente aritmético.

Para Chevallard (1989, p. 64), "a ferramenta essencial da aritmética é linguagem comum aumentada do cálculo sobre os números. [...]. Continua a ser essencialmente um conhecimento oral que dá ao papel-lápis a função de efetuação das operações sobre os números." No caso das atividades (2) e (3) o aluno já deve mobilizar conhecimentos de cálculo algébrico, principalmente, os de potências para generalizar o resultado obtido na atividade anterior, ou seja, obter uma fórmula para o cálculo da medida do volume do sólido em questão, em função da medida da aresta do cubo inicial, o que possibilita a resolução de qualquer problema desse tipo. A atividade (4) estaria então imersa nessa etapa do processo de algebrização, pois solicita uma relação funcional em que se confunde parâmetro e incógnita na obtenção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro qualquer a partir da medida de sua aresta. Na atividade anterior já obtivemos tal fórmula em função da medida a da aresta do cubo inicial, mas agora precisamos obtê-la em função da medida x da aresta do cuboctaedro, o que implica em obter a medida x em função da medida a para substituir na fórmula já obtida, o que envolve conhecimentos algébricos que vão além do simples cálculo.

Por outro lado, Bolea (2002) baseada em Chevallard (1989) propõe o processo de modelização algébrica composto por quatro etapas, as quais entendemos estarem imersas na terceira etapa do processo de algebrização proposto por Munzón, Bosch e Gascón (2010, 2015). Bolea (2002) afirma que a **primeira etapa** do processo de modelização é caracterizada por uma problemática inicial que se constitui do sistema a modelizar, ou seja, da situação extra ou intra matemática que será estudada e das questões gerais que surgem a respeito do sistema que não tem respostas imediatas. É nessa etapa que devemos escolher o tipo de modelo que será construído, definindo, por exemplo, a escolha do uso de diferentes variáveis, ou apenas uma, no sistema. A situação que estamos estudando trata de uma situação intra matemática que questiona a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro qualquer em que escolhemos duas variáveis: a medida da aresta do cubo inicial e a medida da aresta do cuboctaedro. Uma questão seria a possibilidade de construir um cuboctaedro a partir de um cubo, por truncaturas. No nosso caso, sabemos as respostas, mas os alunos não. Uma reformulação na tarefa permitiria essas e outras questões como motivação para o início do trabalho.

A construção do modelo matemático, na **segunda etapa,** implica na identificação e designação das variáveis que o caracterizam, além do estabelecimento das relações entre elas. Essa etapa pode ser caracterizada por atividades como construir um modelo algébrico a partir de um sistema de várias variáveis ou parâmetros ou como construir um modelo algébrico a partir de um sistema de dados ou incógnitas. Como em nossa situação estamos usando a truncatura de um cubo, uma variável do sistema é, inicialmente, a aresta do cubo, além das arestas da pirâmide que será truncada. A partir das relações entre essas variáveis construímos um modelo algébrico para calcular a medida do volume do cuboctaedro em função da medida da aresta do cubo que o originou.

Nesta etapa as técnicas utilizadas para a construção do modelo podem ter complexidade crescente: expressar em linguagem algébrica uma quantidade dada; designar verbalmente uma quantidade composta por outras que aparecem no sistema e expressá-la em linguagem algébrica; e designar e expressar algebricamente uma mesma quantidade de duas maneiras diferentes (estas técnicas já foram trabalhadas nas etapas do processo de algebrização). As expressões algébricas que aparecem nesta etapa podem ser provenientes de dois tipos de atividades, a que permite construir um modelo algébrico a partir de um sistema de várias variáveis ou parâmetros (é o caso de nossa situação) e a que permite construir um modelo algébrico a partir de um sistema de dados e incógnitas.

A **terceira etapa** compreende o trabalho com o modelo matemático, ou seja, o trabalho manipulativo propriamente dito, com o objetivo de obter um modelo final que mostre as propriedades do sistema modelizado, além da interpretação desse trabalho e dos resultados obtidos. Esse trabalho manipulativo é caracterizado pelas técnicas utilizadas a partir das atividades de identificar os componentes de uma expressão; identificar a estrutura de uma expressão; aplicar manipulações formais tanto para obter expressões equivalentes, quanto para expressar uma quantidade em função de outras.

Para Bolea (2002) o trabalho de manipulação e transformações de expressões, inclusive sua interpretação, pode ser subdividido em dois subtipos. O primeiro é o trabalho com variáveis ou parâmetros para manipular expressões algébricas com distintas variáveis, como por exemplo, desenvolver tanto por aplicação direta da fórmula para um binômio quadrado, quanto pela propriedade distributiva ou expressar a medida da área de um retângulo que tem lados medindo e unidades, além de substituir ou desenvolver uma fórmula com mais de uma variável ou parâmetro proveniente do trabalho de modelização em que seja necessário substituir os dados e depois resolver uma equação. Como por exemplo, dadas a medida da área de um losango e a medida de sua diagonal maior solicitar a medida da diagonal menor. Esse seria o caso de nossa atividade (5). Ainda, interpretar expressões algébricas com várias variáveis ou parâmetros, como por exemplo, o que pode representar ? Uma das possibilidades apresentada pela autora é a analogia a casos resolvidos anteriormente como “dentro de cinco anos a idade do pai será o triplo da idade do filho” (Ibid, p.128). No caso de nossa situação, na atividade (2) podemos observar que uma pirâmide truncada do cubo inicial representa 1/48 desse cubo e, portanto, o sólido em questão é composto de 47 dessas partes. Já na atividade (3) podemos verificar que o cuboctaedro tem do volume do cubo inicial.

O segundo subtipo apresentado por Bolea (2002) é o trabalho com dados e incógnitas para substituir ou desenvolver em modelizações dadas com dados e incógnitas, comprovar que $2n+1$ é ímpar para $n=3$, $n=5$, $n=2$, ou, ainda, encontrar o valor de x em uma proporção; para manipular expressões algébricas e resolver equações com dados e incógnitas; para interpretar fórmulas com uma variável ou incógnita; para substituir ou desenvolver em fórmulas dadas com dados e incógnitas ou para a resolução de equações sem modelização, nem parâmetros. No caso da situação apresentada não trabalhamos com incógnitas porque não chegamos especificamente a uma equação (com exceção da atividade 5 em que se dá como dado a medida do volume), mas fizemos várias atividades para obter a fórmula final para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro a partir da medida de sua aresta.

Finalmente, na **quarta etapa** do processo de modelização, podemos enunciar novos problemas para ampliar o conhecimento do sistema estudado e organizar os resultados já obtidos. Nesta etapa estariam a atividade (5), que solicita uma inversão da técnica utilizada para o cálculo da medida do volume a partir da medida da aresta ou apresentar outra possibilidade para o cuboctaedro, que aprofunda os conhecimentos do sistema em estudo, a partir das seguintes questões: *que figura seria obtida se fizéssemos truncaturas em um octaedro regular retirando pirâmides cujos vértices coincidem com os vértices do octaedro e as bases passam pelos pontos médios das arestas do octaedro, como mostra a figura 3? Seria possível elaborar uma fórmula para o cálculo de seu volume em função da medida da aresta do octaedro?*

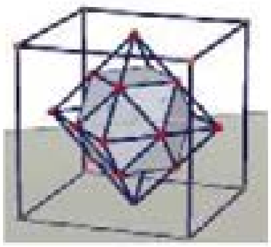

Figura 3. Cuboctaedro obtido a partir de um octaedro regular

Por outro lado, a atividade (6) remeteria ao estudo de outro sistema, ou seja, permite o cálculo da medida do volume de um cubo truncado.

OS PROFESSORES E A SITUAÇÃO

Em algumas vezes em que aplicamos essa situação com professores vimos que, de fato, estão habituados a trabalhar com o cálculo algébrico, especificamente com equações. Tanto os grupos do Brasil, quanto o do Peru não conheciam um cuboctaedro e nem como calcular a medida de seu volume. Em nenhuma das formações trabalhamos com a construção utilizando algum software de representação dinâmica. As atividades iniciais (1), (2) e (3) não lhes apresentaram problema algum, foram de imediato resolvidas. No entanto, questionados para a interpretação do resultado obtido demoraram para responder que na atividade (2) a pirâmide retirada representaria 1 de 48 partes do cubo inicial, sendo necessária uma comprovação por meio de divisões no cubo inicial e alguns cálculos aritméticos para convencimento. A atividade (3), em que era solicitado uma fórmula para o cálculo da medida do volume do cuboctaedro em função da medida da aresta do cubo inicial, foi resolvida em todos os grupos de imediato e os questionamentos de interpretação não apresentaram problemas, todos perceberam que o volume do cuboctaedro era 5/6 do volume do cubo inicial e justificaram a partir da figura.

Na atividade (4) a constatação de que as arestas do cuboctaedro tinham mesma medida foi concluída e justificada rapidamente. Mobilizando o Teorema de Pitágoras, concluíram que , considerando que *x* representa a medida da aresta do cuboctaedro. No entanto, no passo seguinte, que era obter a fórmula para um cuboctaedro qualquer de aresta medindo *x*, e que exigia um trabalho realmente algébrico, provocou incômodo, pois os professores não conseguiam perceber que deveriam partir da expressão encontrada para e obter o valor de *a* em função de *x*, para então substituir na fórmula já encontrada. Tivemos que intervir, mais ou menos, dependendo do grupo, para que a solução fosse encontrada. Os professores de todos os grupos concordaram que seria uma atividade possível de ser trabalhada com alunos do Ensino Médio ou equivalente, no caso do Peru, mas também argumentaram que são atividades que não se encontram nos livros didáticos.

Essas observações podem ser justificadas com os trabalhos de Chevallard (1984, 1989, 1990) e Gascón (1993, 1995, 1999), que entendem a álgebra escolar como uma aritmética generalizada, construída a partir de um contexto numérico em que as expressões algébricas surgem da necessidade de representar e manipular números desconhecidos a partir de dados que são conhecidos. Dessa forma, a manipulação algébrica se reduz ao cálculo algébrico como uma prolongação do cálculo aritmético em que a única diferença é a representação de números por letras e que se evidencia no ensino de álgebra na resolução de problemas aritméticos resolvidos por meio de equações.

Assim, além da relação entre álgebra e aritmética, é necessário, como sugere Chevallard, tomar a álgebra como instrumento de modelização, inclusive em contextos geométricos, como é o caso da situação proposta, em que se busca um modelo para determinar o atributo medida de volume a um determinado objeto, o cubo truncado. Este tipo de discussão não faz parte da formação de professores atualmente, pois a geometria e a álgebra são apresentadas como campos de conhecimentos distintos. Da mesma forma tomamos as ideias de Gascón (1995) segundo as quais toda atividade de modelização permite produzir novos problemas sobre o sistema modelizado, no caso das atividades propostas, se parte de condições iniciais que logo são modificadas para alguns ajustes ou generalizações do modelo inicial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A situação geométrica aqui analisada parte de um problema, por nós considerado simples, de determinação de uma fórmula para o cálculo do volume de um sólido em que a álgebra deve ser mobilizada para além do cálculo algébrico, ou seja, na terceira etapa do processo de algebrização segundo Munzón, Bosch e Gascón (2010, 2015), na qual incluímos as quatro etapas do processo de modelização propostas por Bolea (2002). Concordamos ainda com Munzón, Bosch e Gascón (2015) quando afirmam que grande parte das investigações didáticas que tratam de álgebra elementar centram-se em estudar as principais dificuldades dos alunos no início da aprendizagem ou as possíveis atuações do professor ou do ensino para minimizá-las, mas é muito difícil encontrar trabalhos que examinem o que se ensina sob o nome de álgebra elementar ou o que se entende por esse nome nas aulas de matemática.

Assim, entendemos que a geometria pode propiciar um campo vasto de problemas que poderia ajudar nos processos de algebrização e de modelização para que os alunos pudessem mobilizar a álgebra não de forma mecânica, mas como ferramenta que proporciona a solução desses problemas. Não estamos aqui falando de problemas isolados, mas de sistemas de estudos que possibilitam encontrar soluções gerais para um campo de problemas de mesmo tipo. A geometria como vem sendo apresentada nos livros pouco estimula os alunos com problemas para o cálculo de volume, no máximo se justifica uma fórmula dada e se aplica em problemas que mobilizam apenas cálculos numéricos.

Os trabalhos de Almeida (2010), Silva (2012), Almeida e Silva (2010, 2012, 2016), entre outros, possibilitam a abordagem de alguns sólidos arquimedianos construídos por truncaturas de sólidos conhecidos que poderiam ser utilizados para uma discussão em relação à medida de seus volumes.

O trabalho de Santos (2016), por sua vez, foca nos poliedros regulares convexos, principalmente, o icosaedro e o dodecaedro (citados em alguns livros didáticos) no sentido de desenvolver fórmulas para as medidas de seus volumes partindo da ideia de decomposição e composição desses sólidos e das construções propostas para eles por Euclides em seu livro 13. Ambos os trabalhos privilegiam ainda algumas construções geométricas que se articulam com ferramentas algébricas fundamentais para o cumprimento da tarefa de busca de fórmulas. Além disso, o uso do Cabri 3D foi imprescindível nesses trabalhos porque permitiu, por exemplo, realizar cortes, manipular a representação para sua construção, observar todas as faces dos sólidos construídos, identificar suas características, o que mostra que essa tecnologia favorece também o estabelecimento de relações entre o ambiente de representações dinâmicas e os conhecimentos matemáticos.

Assim, podemos inferir que nem a formação inicial de professores, nem sua prática, baseada na utilização de livros didáticos, dão conta de uma aprendizagem que permita a mobilização dos conhecimentos algébricos em sua plenitude. Pelo contrário, podemos dizer que tocam na terceira etapa de algebrização de forma extremamente tímida e, ainda, não permitem o desenvolvimento do processo de modelização, tido por Chevallard como fundamental para um ensino efetivo de álgebra, principalmente com o trabalho com parâmetros e função.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um estudo de truncaturas baseadas no renascimento**. 2010. PUC-São Paulo, 185 p, Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática), 2010.

ALMEIDA, T. C. S.; SILVA, M. J. F. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3-D: A construção do cubo truncado**, VII EPAEM-Encontro Paraense d Educação Matemática, Belém- Pará, Brasil, 2010.

_____. **O Cabri 3D como habitat para o estudo dos sólidos de Arquimedes.** In: Actas do VI Congresso Iberoamericano de Cabri, ISBN: 978-61245391-9-0, p. 202-211, 2012.

_____. **Estudo do octaedro truncado em um ambiente de geometria dinâmica.** XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016.

BOLEA, P.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización:** el caso de la proporcionalidade. Recherches en Didactique des Mathématiques. N. 21(3), p. 247-304, 2001.

BOLEA, P. **El processo de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.** Tese (Doutorado). Universidad de Zaragoza, España, 2002.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college.** Premiere partie, l´evolution de la transposition didactique. Petit x, n. 5, p. 51-94, 1984.

____. **Le passage de l´arithmetique a l´algebre dans l´ensegnement des mathematiques au college.** Deuxieme partie, perspectives curriculares: la notion de modelisation. Petit x, n. 19, p. 43-72, 1989.

_____. **Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college.** Troisième partie. Petit x, n. 23, p. 5-38, 1989-1990.

CHEVALLARD, Y. **Enseignement de l´algèbre et transposition didactique.** In: Actes du Séminaire de l´Associazione Mathesis, Université de Turin, vol. 52(2), p. 175-208, 1994.

FREITAS, M. V. C.; BITTAR, M.. **O ensino do volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do Ensino Médio sob a ótica da TAD.** In: Anais do I Simpósio Latino Americano de Didática da Matemática – LADIMA, 2016, disponível em http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/Trabalhos/MAXLEI%20VINICIUS%20C%C3%82NDIDO%20DE%20FREITAS.pdf

GASCÓN, J. **Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico.** Del patrón análisis-sintesis a la génesis del lenguaje algebraico. Recherches em didactique des mathématiques. N. 13(3), p. 295-332, 1993.

_____. **Un nouveau modele de l´algèbre** élémentaire **comme alternative a l´"aritmétique généralisée".** Petit x, n. 37, p. 43-63, 1995.

_____. **La naturaliza prealgebraica de la matemática escolar.** Educación matemática, n. 11(1), p. 77-88, 1999.

MORAIS, L. B. de. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013. Disponível em http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/13239/Disserta%c3%a7ao%20Leonardo%20Morais.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MUNZON, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. **El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico.** *REDIMAT*, *Vol 4*(2), 106-131, 2015.

____. **Um modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización.** In: M.Bosch et al (Eds), Un panorama de la TAD (vol. 10, p. 743-765). Barcelona, España: Centre de Recerca Matemática, 2011.

_____. **La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria.** IUFM de l´académie de Montpellier, p. 655-676, 2010a.

_____. **La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introcución del álgebra em secundaria.** In: M.M.Moreno et al (Eds.), Investigación em Educación Matemática XIV, p.545-556, Lleida: SEIEM, 2010b.

SANTOS, A. A. dos. **Construção e medida do volumen dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D:** uma possível transposição didática. Tese (Doutorado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

SILVA, M. J. F.. **A construção de situações problemas utilizando o cabri 3D.** I: Actas do VI Congresso Iberoamericano de Cabri, ISBN: 978-61245391-9-0, p. 23-37, 2012.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A.. **Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos.** In: Actas del VII CIBEM, ISSN 2301-0797, p. 7658-7665, 2013.