REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

CÁLCULO MENTAL COM FRAÇÕES: EVOLUÇÃO DAS ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS NUMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Renata Carvalho

João Pedro da Ponte

V6 - Nº 2 - julho / dezembro - 2017

SUBMISSÃO: 29 DE OUTUBRO DE 2017

ACEITAÇÃO: 27 DE DEZEMBRO DE 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

CÁLCULO MENTAL COM FRAÇÕES: EVOLUÇÃO DAS ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS NUMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Mental computation with fractions: evolution of students' strategies in a teaching experiment

Renata Carvalho
UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

RESUMO

Neste artigo analisamos a evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos com frações ao longo de uma experiência de ensino e discutimos os fatores que podem influenciar esta evolução. O quadro concetual centra-se em elementos essenciais para calcular mentalmente como factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas, suportadas por representações mentais. Recorrendo a uma metodologia de Investigação Baseada em *Design* (IBD), realizámos dois ciclos de experimentação. Os resultados mostram uma evolução das estratégias dos alunos, inicialmente baseadas em regras memorizadas e factos numéricos, para estratégias baseadas em relações numéricas apoiadas em representações mentais cada vez mais complexas. Fatores identificados como facilitadores desta evolução são as características das tarefas e a discussão coletiva das estratégias de cálculo mental em sala de aula.

Palavras-chave: Cálculo mental, Números racionais, Estratégias, Representações mentais.

ABSTRACT

In this paper we analyze the evolution of students' mental computation strategies with fractions during a teaching experiment and discuss the factors that may influence such evolution. The theoretical framework is based on fundamental elements needed to compute mentally, such as number facts, memorized rules and numerical relationships supported by mental representations. Using a design-based research approach, we undertook two cycles of experimentation. Our findings suggests that students' mental computation strategies evolved from strategies based on memorized rules and number facts to strategies based on numerical relationships supported by increasingly complex mental representations. The features of tasks and the whole class discussion of students' strategies were identified as factors that may facilitate this evolution.

Keywords: Mental computation, Rational Numbers, Strategies, Mental representations.

Introdução

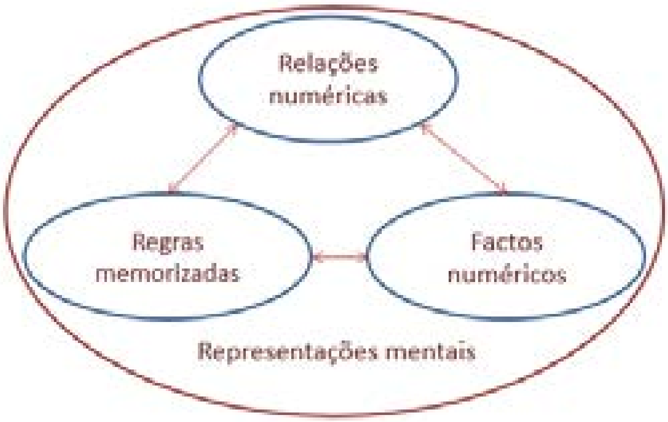
A aprendizagem dos números racionais requer a compreensão, não só destes números mas também das suas relações e operações, associadas a diferentes contextos. A compreensão dos números inteiros é, naturalmente, essencial para a aprendizagem dos números racionais uma vez que o cálculo com estes números é uma extensão do cálculo com números inteiros, com a introdução de novas ideias e processos (BARNETT-CLARKE, FISHER, MARKS & ROSS, 2010). Para que os alunos se apropriem destas novas ideias e processos, é essencial promover uma aprendizagem assente na compreensão e avaliação dessa compreensão onde as ações mentais que exteriorizam (MCCLOSKEY & NORTON, 2009) desempenham um papel fundamental, uma vez que espelham o modo como os alunos pensam com e sobre números.

O desenvolvimento de práticas de cálculo mental na sala de aula, embora nem sempre seja associado à aprendizagem dos números racionais, pode ser uma mais-valia para a aprendizagem destes números com compreensão, principalmente se se privilegiar a discussão coletiva das estratégias dos alunos. Um ambiente de aprendizagem onde as estratégias de cálculo mental dos alunos são partilhadas e discutidas, poderá ser promotor de compreensão dos números racionais. Além disso, pode favorecer a explicitação por parte dos alunos das dificuldades que devem ser discutidas para que conhecimentos prévios construídos de forma incorreta sejam conceptualmente desconstruídos e desenvolvidos. É a perspetiva de que o cálculo mental deve fazer parte das práticas de ensino da matemática por promover aprendizagens importantes no âmbito dos números racionais, que nos leva a analisar neste artigo a evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos de 10-11 anos, com frações, com as quatro operações básicas, ao longo de uma experiência de ensino que teve a duração de cerca de quatro meses e a discutir os fatores que podem influenciar esta evolução.

Cálculo mental com números racionais

Calcular mentalmente requer compreensão da grandeza e valor dos números e do efeito das operações sobre os números e a aquisição prévia de um conjunto de factos numéricos que permitam calcular rapidamente e com precisão (HEIRDSFIELD, 2011). Neste estudo, o cálculo mental é entendido como um cálculo exato, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz onde é possível usar registos intermédios em papel e que, recorrendo a representações mentais, faz uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações (CARVALHO & PONTE, 2015; CARVALHO, 2016). Neste sentido, o conhecimento matemático que os alunos possuem sobre números e operações é uma ferramenta essencial para a realização de cálculo mental em geral e com números racionais em particular. Factos numéricos, regras memorizadas, relações numéricas e representações mentais, são elementos que fazem parte do quadro concetual de suporte a esta investigação e cuja relação entre si está representada na Figura 1.

Figura 1. Quadro concetual sobre o cálculo mental



(Fonte: CARVALHO & PONTE, 2017)

A aprendizagem de factos numéricos inicia-se com a aprendizagem dos números naturais, cujo reportório vai aumentando ao longo da vida, por influência escolar e da vida quotidiana. Estes factos referem-se ao conhecimento prévio de somas, produtos, diferenças ou quocientes e são essenciais para apoiar o cálculo mental. Por exemplo, se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ for um facto numérico para um determinado aluno, este aluno no cálculo

de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ pode decompor $\frac{3}{4}$ em $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ para rapidamente usar este facto numérico no

cálculo de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ e chegar ao resultado $1\frac{1}{4}$.

O recurso a estratégias baseadas na aplicação de regras memorizadas, por parte dos alunos, surge em função da complexidade dos raciocínios usados no cálculo mental com números racionais, maior do que com números naturais (BARNETT-CLARKE, FISHER, MARKS & ROSS, 2010). Possivelmente isso também resulta da experiência matemática dos alunos, cujo conhecimento acerca das operações com números os leva a simplificarem cálculos cada vez com maior frequência. Estas regras memorizadas envolvem, por exemplo, a aplicação de procedimentos referentes à multiplicação e divisão por potências de 10 (o aluno apenas memoriza que na multiplicação por 10, desloca a vírgula uma posição decimal para a direita ou, na divisão por 10, uma posição decimal para a esquerda) ou procedimentos algorítmicos como, na adição de frações, a adição de numeradores quando os denominadores são iguais. Como mostram Carvalho e Ponte (2015), alguns alunos justificam que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ porque "Eu fiz logo meio mais meio que sei logo que dá 1" – reflexo de que este é um facto numérico adquirido; outros dizem $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$ porque: "Como os denominadores são iguais, dá-se o mesmo denominador e os numeradores somam-se. Dá dois sobre dois" – reflexo da aplicação de uma regra previamente memorizada. O uso de factos numéricos e de regras memorizadas podem surgir isoladamente enquanto estratégia de cálculo mental, mas podem igualmente surgir como auxiliares no estabelecimento de relações entre números e operações, como mostra o exemplo que indicámos a propósito do cálculo de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.

Estratégias baseadas em relações numéricas envolvem aprendizagens com compreensão sobre números e operações e evidenciam o pensamento relacional dos alunos (EMPSON, LEVI & CARPENTER, 2010). O pensamento relacional é um aspeto importante no cálculo mental por se basear em relações numéricas. Pensar de forma relacional é ter a capacidade para usar propriedades fundamentais das operações e da noção de igualdade para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson et al., 2010). São exemplos de estratégias baseadas em relações numéricas, a mudança de representação (CANEY & WATSON, 2003) entre números racionais (fraçãodecimal; decimal-->fração; fração-->percentagem; percentagem--> fração; percentagem-->decimal e decimal-->percentagem) ou de um número racional para um número natural (decimal-->número natural referente a $\frac{10}{100}$ em que, por exemplo, no cálculo de 0,19 + 0,1 considera 0,19 como 19 e 0,1 como 10); a relação parte-todo ou parte-parte; a equivalência entre expressões; ou as relações entre operações inversas.

Outro aspeto importante a considerar são as representações mentais a que os alunos recorrem no processo de cálculo mental. O ser humano constrói representações mentais a partir do mundo envolvente e usa essas representações para dar sentido ao que o rodeia e para fazer inferências. Estas representações mentais podem ser compreendidas através da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1990). Esta teoria pretende explicar processos de conhecimento complexos e, em particular, processos de compreensão e inferência, assumindo que existem três tipos de representações mentais: modelos mentais, imagens mentais e representações proposicionais, que são fundamentais nos processos de pensamento. A diferença entre estas representações reside na sua especificidade e função, embora os modelos mentais sejam a base para a criação de imagens e representações proposicionais. Representações mentais são consideradas modelos mentais se representam perceções globais do mundo real (e.g., uso de um contexto de partilha equitativa para dividir uma determinada quantia de dinheiro entre duas pessoas). Representam-se o mundo real com alguma especificidade onde algumas características são contempladas, são consideradas imagens (e.g., relação entre a representação simbólica $\frac{1}{2}$ e uma piza dividida em duas partes da qual se considera uma parte). Representam-se proposições verdadeiras ou falsas, importantes para a construção de inferências acerca do mundo real, são representações proposicionais (e.g., se $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ então $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, porque $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$).

Representações mentais estão na base de processos de raciocínio dos alunos e refletem as suas conceções acerca dos números racionais e das suas operações.

Metodologia de investigação

Este estudo é qualitativo e interpretativo (DENZIN & LINCOLN, 2005) com uma metodologia de *Investigação Baseada em Design (IBD)*[1] (COBB, CONFREY, DISESSA, LEHERE & SCHAUBLE, 2003). Participam duas professoras e duas turmas do 6.º ano (39 alunos no total) com idades compreendidas entre 10 e 11 anos que já tinham trabalhado os números racionais nas suas várias representações (decimal, fração, percentagem) e nas quatro operações matemáticas básicas e a primeira autora (a partir daqui designada por investigadora) como observadora participante.

O estudo desenvolveu-se em três fases (Figura 2): preparação, experimentação e análise. A fase de preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar, com alunos do 5.º ano (9-10 anos) da investigadora, tendo por base um protótipo de experiência de ensino com seis tarefas de cálculo mental. Este estudo preliminar tinha como objetivo perceber as estratégias de cálculo mental dos

1 Designação em português de Design-Based Research de Ponte, Carvalho, Mata-Pereira e Quaresma (2016) que usamos neste artigo.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

alunos com números racionais e algumas das dinâmicas inerentes à realização de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas. Posteriormente, foi construída uma experiência de ensino com dez tarefas de cálculo mental, partindo da conjetura de que uma experiência de ensino realizada durante quatro meses, baseada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos (expressões) e não matemáticos (situações contextualizadas) com números racionais envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias dos alunos no 6.º ano, contribui para o desenvolvimento do reportório de estratégias de cálculo mental desses alunos e para a melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental.

Figura 2. Fases de desenvolvimento do estudo.

A fase de experimentação contemplou dois ciclos, um em 2012 (Ciclo I) e outro em 2013 (Ciclo II). Os dados foram recolhidos recorrendo à observação direta das aulas em que se realizaram tarefas de cálculo mental e à gravação áudio e vídeo dessas aulas, para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva. A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora e discutida e reajustada com as professoras das turmas que a realizaram na sala de aula. A discussão na sala de aula foi conduzida pelas professoras, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias dos alunos.

Na análise de dados foram visionados os episódios de aula com o intuito de identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão. Para a análise das estratégias, foram consideradas três categorias (Quadro 1) que são parte integrante do quadro concetual do estudo (Figura 1): (i) factos numéricos; (ii) regras memorizadas; e (iii) relações numéricas. Estas categorias (e suas subcategorias) foram construídas com base em estudos anteriores (e.g., CANEY & WATSON, 2003) e na análise dos dados recolhidos nos dois ciclos de experimentação. A designação dada à estratégia do aluno foi escolhida em função do elemento mais forte presente nesta estratégia (por exemplo, se faz um uso forte de relações numéricas, nomeadamente da mudança de representação é considerada uma estratégia de categoria "relações numéricas" e subcategoria "mudança de representação"). Para cada categoria foram identificadas, sempre que possível, as representações mentais subjacentes às estratégias dos alunos, nomeadamente modelos mentais, imagens mentais e representações proposicionais. Estas representações mentais foram interpretadas a partir das explicações dos alunos, uma vez que a única forma de aceder ao seu processo de pensamento, é através do modo como estes o exteriorizam.

Quadro 1. Exemplo da categorização de estratégias de cálculo mental.

	Categorias			
	Estratégias de factos numéricos	Estratégias de regras memorizadas	Estratégias de relações numéricas	Representações mentais
Subcategorias	Somas, produtos, quocientes ou diferenças previamente conhecidos.	Simplificação de cálculos; Procedimento algorítmico; Divisão/multiplica-ção por 10 e/ou 100.	Relação parte-todo; Mudança de representação; Relação entre expressões; Relação entre operações inversas; Propriedades das operações (...)	Modelos mentais: contexto de relógio; dinheiro; compras (...). Imagens mentais: de números, representações, objetos (...). Representações proposicionais: de relações entre números e operações.

As três fases do estudo foram acompanhadas por uma reflexão individual constante por parte da investigadora e por uma reflexão coletiva entre esta e as professoras nas reuniões de preparação/reflexão[2] nos dois ciclos de experimentação. Esta reflexão, em conjunto com uma revisão de literatura continuada, permitiu melhorar e aprofundar não só o quadro concetual e as conjeturas de ensino e aprendizagem, mas também a experiência de ensino, originando diversos ajustamentos nas tarefas ao longo dos dois ciclos de experimentação.

2 As reuniões de preparação e reflexão foram áudio-gravadas, mas não são alvo de análise neste artigo.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

A experiência de ensino

A experiência de ensino é composta por dez tarefas de cálculo mental, que denominámos de "Pensa rápido!" Estas tarefas incluem expressões e situações contextualizadas que foram projetadas semanalmente na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado. No primeiro ciclo de experimentação realizámos sete tarefas envolvendo expressões, duas com situações contextualizadas e uma envolvendo ambas (mistas). No segundo ciclo, procedemos a uma reorganização das tarefas tendo-se realizado cinco tarefas com expressões e cinco tarefas mistas. Esta reorganização emergiu da necessidade dos alunos darem sentido aos números usando situações contextualizadas (GALEN, FEIJS, FIGUEIREDO, GRAVEMEIJER & KEIJKER, 2008). No Quadro 2 apresentamos alguns exemplos de questões envolvendo frações que fazem parte da última versão das partes 1 e 2 das tarefas da experiência de ensino, usadas no ciclo de experimentação II.

Cada tarefa é constituída por duas partes, tendo cada parte cinco expressões ou quatro situações contextualizadas. Os alunos têm 15 segundos para resolver mentalmente cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada e anotar o resultado numa folha de registo. Após a projeção da primeira parte, promove-se um primeiro momento de discussão de estratégias dos alunos com o intuito de influenciar positivamente a realização da segunda parte da tarefa. No final da segunda parte promove-se novo momento de discussão. A duração destes momentos de cálculo mental varia entre os 30 e os 90 minutos. Nas tarefas com expressões, intercalam-se expressões sem valor em falta (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$) com expressões de valor em falta (e.g., $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$) sendo que estas últimas representam um contexto de aprendizagem promotor de pensamento relacional ao invés de uma aplicação direta de procedimentos de cálculo (CARPENTER, FRANKE & LEVI, 2003). Nas tarefas mistas, uma das partes contém expressões e a outra parte contém situações contextualizadas (e.g., *"O sólido A tem 8,4l de capacidade e o sólido B tem* $\frac{3}{4}$ *de capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B"*) que pretendem facilitar a criação de referências e de representações mentais, nos alunos, bem como ajudá-los a dar significado aos números através da relação entre estas situações e algumas das expressões apresentadas. Por exemplo, a resolução da situação do sólido A e B, referida em cima pode relacionar-se com a resolução da expressão $\frac{3}{4}$ de 60, sendo que, por diversas vezes os alunos fizeram estas analogias, tal como pretendíamos.

A construção das tarefas seguiu quatro princípios fundamentais, que integram um vasto leque de conhecimentos sobre números e operações e que permitiram construir tarefas de cálculo mental capazes de promover nos alunos o desenvolvimento de capacidades de cálculo e de conhecimentos sobre números e operações, bem como criar oportunidades para discutir aprendizagens que necessitam de ser aprofundadas e/ou revisitadas.

Princípio 1 – *Usar contextos que possam ajudar os alunos a dar significado aos números.* O uso de contextos matemáticos (expressões com e sem valor em falta) e de situações contextualizadas ajuda os alunos a darem significado aos números (GALEN *et al.*, 2008) e a transitarem entre diferentes contextos (BELL, 1993) onde podem usar estratégias semelhantes para os resolver. Os contextos através dos quais se abordam os números racionais podem proporcionar a criação de modelos mentais (JOHNSON-LAIRD, 1990) aos quais os alunos recorrem quando necessário.

Princípio 2 – Usar diversas representações de um número racional. O recurso a diversas representações de um número racional (decimal, fração e percentagem) e a números de referência facilitam a equivalência entre representações (CANEY & WATSON, 2003) e operações e o estabelecimento de relações entre representações e imagens mentais de determinados conceitos matemáticos (SWAN, 2008).

Princípio 3 – Usar tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva. Tarefas com características diferentes podem levar os alunos a desenvolverem estratégias baseadas em raciocínios diversos (HENNINGSEN & STEIN, 1997). O uso de diferentes contextos (como referido no *princípio 1*) proporciona oportunidades de aprendizagem com níveis de exigência cognitiva diversificados. Enquanto as situações contextualizadas são de nível cognitivo alto por exigirem ao aluno uma análise mais cuidada do contexto e a seleção da operação a utilizar, as expressões sem valor em falta são de nível de exigência cognitiva baixa pois, na sua maioria, apelam ao uso de procedimentos simples. Dentro das expressões, destacamos o papel das expressões de valor em falta como sendo questões de nível de exigência cognitiva elevada pela oportunidade que representam para desenvolver o pensamento relacional dos alunos, um aspeto essencial de suporte à aprendizagem da Álgebra (CARPENTER *et al.*, 2003).

Princípio 4 – Ter em conta a investigação sobre o cálculo mental e os números racionais. O conhecimento acerca do que envolve o cálculo mental (e.g., HEIRDSFIELD,

2011) e a aprendizagem dos números racionais, no qual se inclui a importância dos aspetos enumerados nos princípios 1 e 2, bem como as possíveis estratégias e erros dos alunos (e.g., CANEY & WATSON, 2003) apoiam a seleção de números e contextos que promovam o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e potenciem relações entre números e operações. O uso de números de referência facilita o estabelecimento destas relações.

Na experiência de ensino, os alunos calculam mentalmente apenas com a representação fracionária nas tarefas 1 e 2 em expressões com e sem valor em falta. Posteriormente, esta representação surge, tanto em expressões como em situações contextualizadas, em simultâneo com a representação decimal (tarefas 3, extra, 5 e 6) e com percentagens (tarefas 8, 9 e 10). O Quadro 2 mostra exemplos de algumas questões de cálculo mental com a representação fracionária usadas ao longo da experiência de ensino nas partes 1 e 2 de cada uma das tarefas. Estas tarefas permitem desenvolver e ampliar estratégias de cálculo mental dos alunos ao rever e consolidar aprendizagens envolvendo números racionais de referência e, ao promoverem um conjunto de relações e o uso de propriedades das operações. Mas as tarefas, por si só, são insuficientes para desenvolver o cálculo mental dos alunos. Estas são o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos e a sua realização na sala de aula deve promover a reflexão e ser objeto de discussão para que se construam conhecimentos de forma coletiva. Na perspetiva de Thompson (2009), o desenvolvimento do cálculo mental deve ter lugar num ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam confortáveis a partilhar as suas estratégias, e onde o professor oiça atentamente as suas estratégias e as reforce positivamente, contribuindo para a melhoria do conhecimento dos alunos acerca de números e operações e sua capacidade de implementar estratégias eficazes. O professor deve ainda assegurar-se que os alunos tiveram oportunidade de experienciar situações diversificadas de cálculo mental para assim desenvolverem estratégias cada vez mais sofisticadas.

Quadro 2. Exemplo de questões de cálculo mental com a representação fracionária.

Tarefa	Questões – Parte 1	Questões – Parte 2
1	$a)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$d)\frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$
2	$c)\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$	$h)?\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$
3	$a)\frac{3}{4}+0,5$	i) Para fazer refresco de laranja é necessário de $\frac{1}{10}l$ concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. Que quantidade de concentrado se deve usar para fazer 1,5l de refresco.
Extra	$d)\ \frac{4}{5}\div?=\frac{1}{5}$	$f)\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$
5	O avô do João já gastou $\frac{5}{10}$ da capacidade de um depósito de água na rega do jardim. Quanto lhe falta para esvaziar o depósito?	$g)\ 12,2\div0,5$
6	O sólido A tem 8,4l de capacidade e o sólido B tem $\frac{3}{4}$ da capacidade do sólido A. Calcula a capacidade do sólido B.	$h)\ ?\times0,5=30$
8	$a)\frac{3}{4}\ de\ 60$	$f)\ \frac{1}{5}\ de\ ?=8$
9	Uma camisola custa 20€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.	$\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$
10	A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Com 0,75l de refresco, quantos copos consegue encher a Ana?	$e)\ \frac{6}{12}+?=1$

Outro aspeto que consideramos importante é o questionamento na sala de aula, quer no sentido professor-aluno, quer entre alunos. Questões do tipo "Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega?" visam ajudar os alunos a explicar e a clarificar como pensaram e a serem críticos face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as estratégias dos alunos, através da interação entre estes. Desenvolver o cálculo mental dos alunos requer tarefas que potenciem a relação entre números e operações, mas sobretudo uma discussão na sala de aula que permita partilhar conhecimentos e formas de pensar.

A dinâmica de realização das tarefas mantém-se ao longo de toda a experiência de ensino. Os números racionais surgem em diferentes representações (decimal, fração e percentagem) estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o conteúdo matemático que as professoras estão a trabalhar no momento. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades usa-se a representação em fração e em Estatística usam-se as três representações. Esta opção permite relacionar números racionais com diversos conteúdos matemáticos e desenvolver o cálculo mental de forma integrada, com a aprendizagem dos números racionais prolongada no tempo.

Evolução das estratégias de cálculo mental dos alunos com frações

Em ambos os ciclos de experimentação as estratégias de cálculo mental dos alunos mostram evolução na forma como estes pensam sobre frações e suas operações. Inicialmente, os alunos centram as suas estratégias em factos e regras memorizadas, transitando para outras centradas em relações numéricas. Esta evolução é analisada tendo por base as estratégias de cálculo mental de Marta (Ciclo de experimentação I) e Inês, Rui e Ricardo (Ciclo de experimentação II) que se indicam no Quadro 3.

A expressão $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ foi a primeira questão de cálculo mental que os alunos resolveram mentalmente. A resolução desta expressão não requer cálculos complexos, mas apenas a compreensão, por parte do aluno, da grandeza envolvida ou a simples aplicação de um facto numérico como iremos mostrar a seguir.

Quadro 3. Análise das estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino nos ciclos II e II de experimentação.

Tarefa	Questão	Estratégia do aluno	Análise das estratégias		
			Categoria	Subcategoria	Representação mental
1	$a)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	Marta Ciclo I: Eu fiz logo meio mais meio que sei logo que dá 1.	Facto numérico	Duas metades formam a unidade	Imagem mental
		Inês Ciclo II: $\frac{2}{2}$. Os denominadores estão iguais. Deixei na mesma e depois 1+1=2.	Regra memorizada	Procedimento do algoritmo da adição de frações	Imagem mental
2	$d)\frac{4}{6}\div\frac{2}{6}$	***Rui Ciclo II***: Deu-me $\frac{2}{6}$. Tipo, $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{6}$ eu fiz 4+6, deu 10. E, 2+6 deu 8 … e dividi [antes subtrai] pelos mesmos. Então, 10-8 equivale a 2.	Regra memorizada	Procedimentos algoritmos (adição e subtração de números naturais)	Imagem mental
Extra	$f)\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$	***Marta Ciclo I***: Eu soube imediatamente que $\frac{7}{14}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$. . . Porque metade de 14 é 7. Então equivale a $\frac{1}{2}$. Então $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ dá 1.	Relação numérica	Relação entre numerador e denominador de uma fração	Representação proposicional
		Inês Ciclo II: Não fiz, mas como $\frac{7}{14}$ é metade, fiz metade mais metade que deu 1.	Facto numérico	Duas metades formam a unidade	Imagem mental
9	$g)\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$	***Ricardo Ciclo II:*** [Fiz] o mesmo que o Luís. [$\frac{90}{30}$. Segui o algoritmo normal]	Regra memorizada	Procedimento do algoritmo “inverte e multiplica” na divisão de frações	Imagem mental
10	A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Com 0,75 l de refresco, quantos copos consegue encher a Ana?	***Ricardo Ciclo II***: $\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$. . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos.	Relação numérica	Mudança de representação	Representação proposicional
		Rui Ciclo II: Eu pus $\frac{6}{8}$ porque $\frac{1}{8}$ era um copo normal pequeno. 75 [%] equivale a $\frac{3}{4}$ e estamos a falar em denominador 8 . . . por causa de $\frac{1}{8}$. Então tentei ir semelhante $\frac{6}{8}$, 6 copos. Porque o litro é 8 e ele só conseguiu com 75[%], então 75[%] é 6 copos.			

Como nem todos os alunos entendem a representação $\frac{1}{2}$ da mesma forma e dada a sua importância enquanto referência para pensar sobre frações inferiores à unidade, esta representação e a adição de duas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ surgiu diversas vezes na experiência de ensino para que este entendimento fosse discutido, compreendido e partilhado.

Para resolver a expressão anterior, Marta (Ciclo I) recorre a um facto numérico que conhece (duas metades formam a unidade) mostrando que associa à fração o conceito de metade, enquanto Inês (Ciclo II) necessita de usar uma regra previamente memorizada para a adição de frações, não mostrando qualquer entendimento acerca da grandeza associada a $\frac{1}{2}$. No que se refere às representações mentais, tanto a estratégia de Marta como a de Inês parece ter subjacente o recurso a imagens mentais, embora a explicação dada pelas alunas seja pouco explícita. A estratégia de Marta poderá estar associada à imagem mental da representação pictórica da adição de duas frações que representam metade de uma quantidade, por rapidamente relacionar a expressão com "meio mais meio" ou simplesmente à memorização do facto numérico em causa. A estratégia de Inês pode ter por base a imagem mental da visualização de um procedimento que esta conhece, com especial foco nos denominadores iguais, uma vez que esta é supostamente uma condição essencial para a adição de frações.

A tarefa extra (6.ª tarefa a ser realizada pelos alunos) surgiu com a necessidade de rever algumas das estratégias de cálculo mental dos alunos, depois de uma interrupção letiva. Nesta tarefa a expressão $\frac{7}{14}+\frac{1}{2}$ tem o mesmo objetivo que o da expressão que apresentámos anteriormente, mas com um grau de dificuldade acrescido pelo facto de uma das frações não ser $\frac{1}{2}$ mas sim equivalente. De salientar que houve alunos que não reconheceram esta equivalência limitando-se a aplicar um procedimento algorítmico, mas tanto Marta como Inês, mostram evolução no modo como pensam para resolver esta questão, tendo em conta o que fizeram a propósito do cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Inês (Ciclo II) reconhece que $\frac{7}{14}$ é equivalente a metade logo, "metade mais metade" iria ser igual a 1, abandonando o recurso a estratégias de regras memorizadas para passar a estratégias baseadas em factos numéricos. A representação mental subjacente à estratégia de Inês poderá ser semelhante à usada por Marta na primeira expressão.

No que se refere a Marta, esta, para além de reconhecer igualmente a equivalência entre as frações $\frac{7}{14}$ e $\frac{1}{2}$, a sua explicação evidencia uma GEneralização acerca de frações que representam "metade". No cálculo mental desta expressão, a aluna recorre agora a relações numéricas e ao pensamento relacional, onde considera o numerador e o denominador da fração $\frac{7}{14}$ e ao verificar que 7 é metade de 14, conclui que a fração é equivalente a $\frac{1}{2}$, aplicando de seguida o facto numérico que já tinha usado anteriormente. Esta estratégia poderá ter subjacente uma representação proposicional baseada em proposições verdadeiras, que se relacionam com as relações numéricas realizadas por Marta: Para $\frac{a}{b}$ em que $a = b \div 2$ então $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Esta evolução na estratégia de Marta, do uso de factos numéricos para o uso de relações numéricas, onde esta verbaliza uma generalização para frações que representam $\frac{1}{2}$, permite à aluna o reconhecimento de qualquer fração equivalente a $\frac{1}{2}$. O facto de termos recorrido com alguma frequência a representações equivalentes a $\frac{1}{2}$ (e.g., $\frac{3}{6}, 0{,}5, 50\%$) ao longo da experiência, em diversos contextos, ajudou certamente os alunos a apropriarem-se da grandeza associada a $\frac{1}{2}$, levando-os à realização de generalizações, como aconteceu com Marta.

Na tarefa 2 a resolução da expressão $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ pode apoiar-se, por exemplo, na compreensão do conceito de divisão como agrupamento (em $\frac{4}{6}$ quantas vezes é possível colocar $\frac{2}{6}$), ou então, na relação inversa entre divisão e multiplicação (quantos $\frac{2}{6}$ preciso para perfazer $\frac{4}{6}$) sem que seja necessária a aplicação de procedimentos algorítmicos. No entanto, Rui aplica um conjunto de procedimentos incorretos (regras memorizadas) relativos à adição e subtração de números naturais para dividir duas frações, que podem ter por base imagens mentais de procedimentos que são do seu conhecimento e que aplica sem qualquer sentido. Rui chega ao resultado adicionando o numerador de cada fração com o respetivo denominador (4+6=10 e 2+6=8) e subtraindo ambas os resultados para obter 2, o numerador da fração que assume como resultado, mantendo os denominadores. Este é sem dúvida uma estratégia criativa, mas que mostra lacunas na aprendizagem de Rui ao nível da compreensão do conceito de divisão em geral e da divisão de frações em particular.

Na tarefa 9, no cálculo de $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$, a compreensão do conceito de divisão teria sido igualmente importante para a resolução desta expressão. Apesar da explicação de Ricardo não ser clara quanto ao modo como resolveu a expressão, ao referir que fez o mesmo que o colega Luís, dá-nos a indicação de que usa uma regra memorizadas, ou seja o algoritmo "inverte e multiplica" uma vez que chega ao resultado $\frac{90}{30}\left(\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{9 \times 10}{10 \times 3} = \frac{90}{30}\right)$ que, à semelhança de Inês, pode ter subjacente imagens mentais de procedimentos que conhece. Ao contrário de Rui, Ricardo chega a um resultado correto, mas não mostra compreensão relativamente à operação que realiza, limitando-se a aplicar um conjunto de procedimentos.

Na tarefa 10, a estratégia de Rui e Ricardo para a resolução da situação contextualizada *"A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem* $\frac{1}{8}$L *de capacidade. Com 0,75L de refresco, quantos copos consegue encher a Ana?"* mostra uma evolução significativa na forma como pensam sobre divisão de números racionais, tendo em conta o modo como dividiram frações nas tarefas 2 e 9. Esta é uma questão da última tarefa da experiência de ensino com um nível cognitivo elevado relativamente às expressões que estes alunos resolveram anteriormente. A situação envolve números racionais em duas representações diferentes (fração e decimal) e a operação que conduz ao resultado correto não está indicada, sendo esta uma opção a tomar pelos alunos. Na resolução desta situação, que poderia ser resolvida através da expressão $0{,}75 \div \frac{1}{8}$, tanto Rui como Ricardo usam relações numéricas onde a mudança de representação assume um papel fundamental no estabelecimento de outras relações que se seguem. Ambos evidenciam conhecimentos sobre equivalência entre representações dos números racionais e entre frações. Ricardo associa 0,75 a 75% e posteriormente a $\frac{6}{8}$, possivelmente porque o divisor era uma fração de denominador 8. De notar que a fração $\frac{1}{8}$, certamente por não ter sido muito usada e discutida na experiência de ensino criou algumas dificuldades aos alunos, o que não foi o caso de Ricardo uma vez que transitou facilmente entre representações dos números racionais até encontrar aquela que mais lhe facilitaria o cálculo. Ao optar por converter 0,75 em $\frac{6}{8}$ e tendo em conta que cada copo tinha a capacidade de $\frac{1}{8}$, de forma quase intuitiva e sem necessidade de cálculos demorados, o aluno chega ao resultado 6 mostrando compreender a relação entre as frações $\frac{6}{8}$ e $\frac{1}{8}$. No caso de Rui, este associa 0,75 a 75% e posteriormente a $\frac{3}{4}$, referências sobejamente discutidas na experiência de ensino e, como necessita de um denominador 8, converte $\frac{3}{4}$ em $\frac{6}{8}$. De realçar o facto de Rui mostrar ter noção da grandeza de $\frac{1}{8}$ ao associar a esta fração "um copo normal pequeno" e de reconhecer que a unidade (o litro) seria 8 (estaria possivelmente a referir-se a $\frac{8}{8}$). Mas como só foram usados 75% do litro (0,75L), encheram-se apenas 6 copos. Esta parte da explicação de Rui pressupõe o recurso à relação parte-todo ($\frac{8}{8}$ o todo e $\frac{6}{8}$, e $\frac{1}{8}$ as partes).

As estratégias de Rui e Ricardo poderão ter subjacentes representações proposicionais baseadas em proposições verdadeiras, centradas na mudança de representação e na relação entre dividendo e divisor da operação que tinham supostamente de realizar. No caso de Ricardo: se $0{,}75 = 75\% = \frac{6}{8}$ então $0{,}75 \div \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \div \frac{1}{8}$. Assim, $\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$ porque $\frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$. No caso de Rui: se 0,75=75%= $\frac{3}{4}$ e como $\frac{1}{8}$ tem denominador 8, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Se $\frac{8}{8} = 1\ litro$= 8 copos de $\frac{1}{8}l$, então $\frac{6}{8} = 6$ copos.

Estes alunos recorrem a representações equivalentes (decimal-->percentagem-->fração), resolvem a situação comparando quantidades, sem recorrer à divisão de forma explícita e mostram compreensão acerca da grandeza dos números envolvidos.

Discussão e conclusão

No início da experiência de ensino, em ambos os ciclos de experimentação, as estratégias de cálculo mental dos alunos com frações centram-se na aplicação de regras memorizadas e factos numéricos, às quais se associam essencialmente imagens mentais de factos e procedimentos conhecidos dos alunos, que estes aplicam muitas vezes sem sentido e compreensão. Com o decorrer da experiência, verifica-se uma evolução nas estratégias dos alunos, uma vez que estes passam a usar relações numéricas mais do que regras e factos, de entre as quais destacamos a mudança de representação (CANEY & WATSON, 2003) como ponto de partida para o estabelecimento de diversas relações. Com o emergir de estratégias baseadas em relações numéricas surgem as representações proposicionais, que apoiam os alunos em processos de raciocínio mais complexos (JOHNSON-LAIRD, 1990). Alguns alunos refletem a aplicação de procedimentos nas suas estratégias iniciais, como Inês e Ricardo ou mesmo Rui (Ciclo II) que mostra não saber dividir duas frações, mas passam a usar estratégias que refletem conhecimentos sobre a grandeza dos números (HEIRDSFIELD, 2011), equivalência entre representações dos números racionais, comparação e relação parte-todo. Marta (Ciclo I) revela conhecer factos numéricos ao nível dos números racionais, mas, na tarefa extra, mostra capacidade para generalizar recorrendo a pensamento relacional, processo importante para a aprendizagem da Álgebra (CARPENTER *et al.*, 2003).

No que se refere aos fatores que podem ter influenciado a evolução das estratégias dos alunos, consideramos que estes se relacionam com os princípios que considerámos na construção das tarefas e as oportunidades de discussão coletiva de estratégias em sala de aula. Neste artigo, de acordo com os exemplos que analisámos, começamos por destacar a importância dos princípios 2 e 4. A inclusão de outras representações dos números racionais (decimal e percentagem) para além da fracionária, a partir da tarefa 3 e a discussão da relação entre estas representações, bem como o uso de números de referência (e.g., $\frac{1}{2}, 0{,}2, \frac{1}{5}, 50\%$) (CANEY & WATSON, 2003) contribuiu certamente para que Rui e Ricardo estabelecessem facilmente a relação entre $0{,}75, 75\%, \frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$.

A inclusão de situações contextualizadas (nível cognitivo elevado – princípio 3) a par de expressões com e sem valor em falta, que surgiu também a partir da tarefa 3, contribuiu para diversificar os contextos (BELL, 1993; GALEN *et al.*, 2008) em que os números racionais são apresentados (princípio 1) e permitiu aos alunos estabelecer relações entre contextos matemáticos (expressões) e não matemáticos (situações contextualizadas), favorecendo a compreensão da grandeza associada aos números racionais. Recordamos que as expressões $\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$ e $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$ foram resolvidas erradamente ou com recurso a procedimentos algorítmicos por Rui e Ricardo, mas que ambas as expressões se assemelham à que resolvia a situação contextualizada realizada por estes alunos $\left(\frac{6}{8} \div \frac{1}{8}\right)$ onde depois de recorrerem a representações equivalentes limitaram-se a comparar $\left(\frac{6}{8} \div \frac{1}{8}\right)$, usando de modo implícito o conceito de divisão. De realçar ainda a importância de propor aos alunos tarefas de diferente nível cognitivo (Henningsen & Stein, 1997). Tarefas de nível cognitivo elevado incentivam raciocínios mais elaborados. Na resolução de expressões sem valor em falta o aluno poderá apenas ter de aplicar um facto ou uma regra, mas o uso de situações contextualizadas leva-o a ter de interpretar a situação, de analisar a relação entre os números e de escolher a operação adequada à resolução da situação. O facto dos números racionais terem surgido num contexto de medida, poderá ter facilitado o modo como Rui e Ricardo pensaram sobre eles, uma vez que são contextos conhecidos dos alunos e acerca dos quais devem possuir representações mentais que possam apoiar os seus processos de raciocínio.

As características das tarefas revelaram-se fundamentais no processo de evolução das estratégias dos alunos e melhoria do conhecimento acerca dos números racionais, contudo, perderiam toda a sua importância se estas características não tivessem sido amplamente enfatizadas nas discussões coletivas de cálculo mental em sala de aula. Com frequência se discutiu a relação entre representações dos números racionais de referência, entre operações, propriedades das operações e entre contextos matemáticos e não matemáticos que pudessem criar representações mentais nos alunos de modo a apoiá-los no seu cálculo mental. As discussões coletivas foram igualmente importantes para compreender e avaliar o conhecimento matemático dos alunos em geral e em particular no que se refere aos números racionais, avaliação esta que permitiu desconstruir erros concetuais dos alunos.

Deste modo, os resultados apresentados neste artigo sugerem que o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos com números racionais representa um contributo para a aprendizagem destes números e também para o desenvolvimento do seu pensamento relacional (EMPSON *et al.*, 2010). No entanto, é fundamental que as tarefas sejam construídas tendo em conta os quatro princípios acima indicados, para que as aprendizagens sobre números e suas operações sejam consideradas e objeto de discussão em sala de aula, criando assim condições favoráveis à aprendizagem dos alunos.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora (referência SFRH/BD/69413/2010).

Referências

BARNETT-CLARKE, C., FISHER, W., MARKS, R., & ROSS, S. *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM, 2010.

BELL, A. Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 5-34, 1993.

CANEY, A., & WATSON, J. M. Mental computation strategies for part-whole numbers. AARE 2003 *Conference papers, International Education Research*. (disponível em http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf on 15/05/2010), 2003.

CARPENTER, T., FRANKE, M., & LEVI, L. *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARVALHO, R., & PONTE, J. P. Cálculo mental com números racionais: representações mentais dos alunos. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 69-83). Bragança: SPIEM, 2015.

CARVALHO, R. *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/23646), 2016.

CARVALHO, R., & PONTE, J. P. Mental computation with rational numbers: Students' mental representations. *Journal of Mathematics Education*, 10 (2), 17-29. (https://doi.org/10.26711/007577152790010), 2017.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHERE, R., & SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13, 2003.

DENZIN, N., & LINCOLN, Y. Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage, 2003.

EMPSON, S., LEVI, L., & CARPENTER, T. The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer, 2010.

GALEN, F., FEIJS, E., FIGUEIREDO, N., GRAVEMEIJER, K., HERPEN, E., & KEIJZER, R. *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense, 2008.

HEIRDSFIELD, A. Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96-102, 2011.

HENNINGSEN, M., & STEIN, M. Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 524-549, 1997.

JOHNSON-LAIRD, P. N. *Mental models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (originally published in 1983), 1990.

MCCLOSKEY, A., & NORTON, A. Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15(*1), 44-50, 2009.

PONTE, J. P., CARVALHO, R., MATA-PEREIRA, J., & QUARESMA, M. . Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77-98, 2016.

SWAN, M. Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra. *Educational Designer*, *1*, 1-17, 2008.

THOMPSON, I. Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42, 2009.