FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS: UMA PESQUISA REALIZADA NA PESPECTIVA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Edson Crisostomo

Rieuse Lopes

V6 - Nº 2 - julho / dezembro - 2017

SUBMISSÃO: 17 DE JULHO DE 2017

ACEITAÇÃO: 31 DE 1GOSTO DE 2017

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS: UMA PESQUISA REALIZADA NA PESPECTIVA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Functions and its derivatives: a research conducted in advanced mathematical thinking perspective

Edson Crisostomo
edson.crisostomo@unimontes.br
Universidade Estadual de Montes Claros

Rieuse Lopes
rieuselopes@yahoo.com.br
Universidade Estadual de Montes Claros

RESUMO

Neste artigo, apresentamos uma pesquisa relacionada ao estudo de funções e suas derivadas no contexto do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo consiste em analisar como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas/mobilizadas a partir das interações entre estudantes e professores, durante a apresentação de um seminário centrado nas representações gráficas e algébricas das funções e suas derivadas, realizado na perspectiva de atividades exploratório-investigativas com a utilização do GeoGebra. O marco teórico remete-se ao Pensamento Matemático Avançado. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, desenvolvida por meio de uma análise de conteúdo de atividades desenvolvidas por estudantes universitários. Nos resultados ressalta-se a predominância da imagem conceitual do objeto de estudo. As atividades exploratórias implementadas revelaram-se úteis para a proposição e verificação de conjecturas, discussões e reflexões sobre os conteúdos, interações entre professores e estudantes e melhoria da compreensão dos conteúdos estudados.

Palavras-chave: Atividades exploratório-investigativas. GeoGebra. Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação. Pensamento Matemático Avançado. Processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

In this paper, we present a research related to the study of functions and their derivatives in the context of Differential and Integral Calculus. The objective is to analyze how and what way mathematical definitions are used / mobilized from the interactions between students and teachers, during the presentation of a seminar centered on the graphic and algebraic representations of functions and their derivatives, carried out in the perspective of exploratory activities -investigations with the use of GeoGebra. The theoretical reference frame consists of Advanced Mathematical Thinking. It is a qualitative research, developed through a content analysis of the activities developed by university students. The results highlight the predominance of the conceptual image of the object of study. The exploratory activities implemented proved to be useful for proposing and verifying conjectures, discussions and reflections on the contents, interactions between teachers and students and improving the understanding of the contents studied.

Keywords: Exploratory-investigative activities. GeoGebra. Digital Information and Communication Technologies. Advanced Mathematical Thinking. Teaching and learning process of Differential and Integral Calculus.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui retratada foi motivada por inquietudes surgidas de nossa prática profissional como professores universitários, relacionadas com as dificuldades que os estudantes geralmente apresentam no processo de aprendizagem dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral. A literatura especializada da área de Educação Matemática, mais especificamente relacionada à Didática do Cálculo Diferencial e Integral, evidencia que essa disciplina tem ocupado um papel de destaque nas pesquisas por "constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na forma do pensamento avançado em Matemática" (IGLIORI, 2009, p.13).

Este artigo é recorte de uma pesquisa centrada na Didática do Cálculo, cujo objetivo consiste em analisar como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas/mobilizadas a partir das interações entre estudantes e professores, durante a apresentação de um seminário sobre as representações gráficas e algébricas de funções e suas derivadas, realizado na perspectiva de atividades exploratório-investigativas. Essas atividades foram desenvolvidas com a utilização do GeoGebra e implementadas em uma disciplina introdutória de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Sistemas de Informação da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), ministrada no primeiro semestre de 2013.

Focamos as atenções nas interações que aconteceram durante as apresentações de um seminário, no qual os estudantes apresentaram os trabalhos resultantes de seus estudos e das explorações realizadas por meio do GeoGebra relacionadas às funções e suas derivadas. O seminário constitui-se em um espaço que deu voz aos estudantes, privilegiando as discussões de ideias e argumentações que possibilitaram identificar algumas incongruências entre definições pessoais e formais dos conceitos matemáticos abordados. Nesse sentido, observamos que as interações produzidas entre os estudantes e os professores foram significativas. Entretanto, constatamos dificuldades dos estudantes tanto nos registros quanto nas argumentações orais realizadas durante o seminário, relativas à utilização das definições matemáticas formais de funções e suas derivadas.

A metodologia consiste em uma pesquisa qualitativa, entendida como "indagação baseada em pressupostos de que os indivíduos constroem a realidade social na forma de significados e interpretações e que essas construções são transitórias e situadas" (GALL, BORG e GALL, 1996, p. 767). A coleta dos dados foi realizada por meio da gravação do seminário em vídeo e dos arquivos produzidos pelos estudantes em *PowerPoint*. A análise dos dados apoiou-se nos métodos e procedimentos de codificação e categorização (CHARMAZ, 2009) e da análise de conteúdo qualitativa (GRANEHEIM e LUNDMAN, 2004).

O referencial teórico contemplou noções desenvolvidas pelo Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991; VINNER, 1991; DREYFUS, 1991), especialmente os construtos imagens conceituais e definições conceituais – pessoal e formal – foram utilizadas para realizar uma análise a respeito da compreensão dos estudantes sobre funções e suas derivadas com ênfase no uso de definições matemáticas (VINNER, 1991). Fundamentamos também nas atividades exploratório-investigativas (FONSECA, BRUNHEIRA e PONTE, 1999; PONTE, 2003) desenvolvidas com a utilização de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

Sobre essas Tecnologias, elas vêm se constituindo como uma das tendências no ensino de Matemática, devendo ser integrada aos processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Essa integração se justifica pela utilização das TDIC para potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos e por possibilitar aos estudantes "a oportunidade de pensar criticamente, resolver problemas, trabalhar cooperativa e colaborativamente, tomar iniciativas, ter um papel ativo no seu processo de aprendizagem" (CYRINO e BALDINI, 2017, p. 26).

Sintetizaremos, nas seções seguintes, os fundamentos teóricos, os procedimentos metodológicos, a análise e discussão de resultados e concluiremos com as considerações finais.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

As investigações que vêm sendo realizadas em Didática do Cálculo são abundantes, como podem ser apreciadas, por exemplo, nas pesquisas dedicadas ao tema (MAMONA-DOWNS e DOWNS, 2008; TALL, 1996; CRISOSTOMO, 2012; 2017; PINTO, 2014). Optamos por centrar o marco teórico desta pesquisa no Pensamento Matemático Avançado (TALL e VINNER, 1981; TALL, 1991; 1992; 1995; DREYFUS, 1991), especificamente nos construtos de imagem conceitual e de definição conceitual. As interações realizadas entre os estudantes e entre professores e estudantes serão interpretadas a partir do Interacionismo Simbólico (BLUMER, 1980; GODINO e LLINARES, 2000). Utilizamos também as noções de atividades exploratório-investigativas (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999; PONTE, 2003).

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

2.1 Pensamento Matemático Avançado: imagem conceitual e definição conceitual

Uma sistematização do pensamento matemático, desde a perspectiva cognitivista, foi realizada por Tall (1995), por meio de três componentes da atividade humana: a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno e a *ação* como saída. Isso permite considerar as atividades matemáticas, como perceber objetos, pensar e realizar ações sobre eles. Considera que o pensamento matemático inicia-se pela percepção dos objetos do mundo externo e pelas ações exercidas sobre eles. Esse pensamento também se desenvolve simultaneamente por meio dos processos orientados à inspiração de um pensamento criativo baseado na definição formal e na demonstração sistemática dos conceitos matemáticos. À medida que o pensamento se desenvolve tornando-se mais complexo, as ações sobre esses objetos conduzem ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Assim, tanto o pensamento matemático elementar quanto o pensamento matemático avançado referem-se à maneira como se processa internamente a informação.

Segundo Tall (1991, p. 3), a caracterização do ciclo de atividades no pensamento matemático avançado conduz "desde a atitude produtiva de considerar a contextualização de um problema numa investigação matemática até a formulação produtiva de conjecturas e a etapa final de refinamento e demonstração".

Segundo Dreyfus (1991), o pensamento matemático avançado consiste numa grande série de processos que interagem entre si, como os processos de representação e abstração. Além desses dois processos, existem outros, como classificar, conjecturar, induzir, analisar e formalizar, mas é por meio dos dois processos principais que se passa de um nível de pensamento para outros. De acordo com o autor, esses processos podem ser encontrados tanto no pensamento matemático elementar como no pensamento matemático avançado, pois existem tópicos da Matemática básica que podem ser tratados de forma avançada, assim como há um pensamento elementar sobre tópicos avançados, pois a distinção está na complexidade de como são tratados e gerenciados os processos presentes em cada um deles. Dessa forma, Dreyfus (1991) ressalta a importância de o professor conhecer estes processos, pois facilita a compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

As noções teóricas de *imagem conceitual* e *definição conceitual* foram introduzidas na literatura especializada, segundo Tall (1992), pelo trabalho de Vinner e Hershkowitz (1980), e, mais tarde, Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991). A síntese dessas noções, que realizamos, está baseada principalmente no trabalho de Vinner

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

(1991).

Segundo esse autor, quando se vê ou se ouve uma palavra associada a um conceito matemático, algo como o nome do conceito é evocado na memória. Isso faz parte do que é denominada imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem conceitual corresponde ao que está associado ao conceito na mente do sujeito e inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades ligadas ao mesmo. Nesse sentido, esses autores consideram que:

> A imagem conceitual é algo não verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que essas formas verbais não são a primeira coisa evocada em nossa memória. Elas acontecem em estágio posterior. [...] Quando você ouve a palavra "função" por outro lado, você pode lembrar-se da expressão "y = f(x)", você pode visualizar o gráfico de uma função, você pode pensar sobre funções específicas como $y = x^2$ ou $y = sen(x)$, $y = lnx$ etc. Do que nós dissemos, está claro que só é possível falar de imagem conceitual em relação a um sujeito específico. Além disso, o mesmo indivíduo poderia reagir de modo diferente a certo termo (nome do conceito) em situações diferentes. Em Tall & Vinner (1981) o termo "imagem conceitual evocada" é introduzido para descrever a parte da memória evocada num dado contexto. Isso não é, necessariamente, tudo que um certo sujeito sabe sobre uma certa noção. (VINNER, 1991, p. 6).

Por outro lado, a definição conceitual consiste na definição em forma de palavras de um conceito de maneira exata e não circular (VINNER, 1983). Tall e Vinner (1981) fazem a distinção entre uma definição conceitual formal, que é a definição exata e precisa, e a definição conceitual pessoal, que é o entendimento verbal da definição formal de uma pessoa. A definição conceitual, geralmente utilizada para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos no ensino universitário, compreende a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal. Nesse sentido,

> a definição conceitual (se o indivíduo a possuir) é uma questão completamente diferente. Consideramos que a *definição conceitual* é uma forma de palavras usada para especificar esse conceito. Ela pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica ou de forma mais significativa relacionando-a em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo aluno a partir de uma definição. Constitui-se numa forma de palavras que o aluno usa para a própria explicação de sua imagem conceitual (evocada). Se a definição conceitual é dada para o estudante ou construída por ele mesmo, ele pode variá-la de vez em quando. Nesse sentido, uma definição conceitual *pessoal* pode diferir de uma definição conceitual *formal*, sendo esta

> última uma definição conceitual aceita pela comunidade matemática em geral. (TALL e VINNER, 1981, p. 152).

Tomando como referência o trabalho de Tall e Vinner (1981), Meyer (2003, p. 6) considera que a definição conceitual pode constituir-se também numa "reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Nesse caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada)".

A definição conceitual pode ser categorizada segundo o tema e objetivos da investigação. Conforme afirma Vinner (1991, p. 6), "adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber a definição conceitual de cor não garante o entendimento do conceito. Entender, como acreditamos, significa ter uma imagem conceitual. Certos significados devem ser associados com as palavras". Esse autor desenvolveu um modelo que está baseado na existência de duas células (não relacionadas com o conceito biológico): uma para a imagem conceitual e a outra para a definição conceitual. Qualquer uma dessas células pode estar vazia quando não se associa significado algum ao conceito. Ainda que cada célula possa constituir-se de maneira independente, o referido modelo sugere que haja interações entre elas (VINNER, 1991).

2.2 Interacionismo simbólico

O interacionismo considera que as pessoas interpretam o mundo que as cerca de maneira interativa. Essa interação social é contínua e mediada pelo uso de símbolos e significados. Para Blumer (1980, p. 121), "o significado é produzido a partir do processo de interação humana", ou seja, é resultado dos processos de interação, que são provenientes ou provocados pela interação social e podem sofrer mudanças ao longo do tempo, pois, mediante um processo interpretativo desenvolvido pelo sujeito ao se relacionar com os objetos que o cercam, podem ser manipulados e modificados. Assim, Blumer (1980, p. 121) afirma que "o interacionismo simbólico considera os significados produtos sociais, criações elaboradas em e através das atividades humanas determinantes em seu processo interativo".

As perspectivas interacionistas concentram-se nos processos de interação social que ocorrem entre as pessoas, mediados por relações simbólicas, ou seja, enfatizam os processos individuais e os sociais, e o desenvolvimento da compreensão pessoal

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

dos sujeitos é concebido por meio de sua participação. De acordo com Godino e Llinares (2000, p.3), "o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado, é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação", e enfatiza que "os princípios interacionistas podem ser classificados em: professores e estudantes constituem uma cultura interativa na sala de aula, as convenções relativas a cada disciplina emergem interativamente, e o processo de comunicação se apoia nas negociações e nos significados compartilhados".

Para Blumer (1980), os objetos passam a ter significado para a pessoa quando há uma interpretação consciente desse objeto, quando reflete e pensa sobre ele, quando passa por um processo de autointeração, quando seleciona, confere, reagrupa, suspende e transforma os significados à luz da situação em que os objetos estão inseridos. O autor afirma que

> o agente seleciona, modera, susta, reagrupa e transforma os significados sob o ponto de vista da situação em que se encontra e da direção de seus atos. Por conseguinte, a interpretação não deveria ser considerada como uma mera aplicação automática de significados existentes, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados e trabalhados para orientar e formar as ações. Deve-se levar sempre em consideração que os significados desempenham seu papel na ação por intermédio de um processo de autointeração. (BLUMER 1980, p. 122).

De acordo com o autor, o interacionismo simbólico considera que o significado é produzido a partir do processo de interação humana, como produto social, e que o uso de significados por alguém em plena ação envolve um processo interpretativo.

O interacionismo simbólico tem um olhar sobre a aprendizagem em uma perspectiva diferente da forma basicamente cognitivista em que se baseiam os estudos de Tall e Vinner (1981). Para o interacionismo simbólico, na concepção de Blumer (1980), o sujeito é um ser social, e a aprendizagem ocorre por meio de interações entre duas ou mais pessoas, a partir dos significados interpretados. Baseado nas três premissas do interacionismo simbólico desse autor podemos inferir que a ação dos sujeitos deriva dos significados que surgem das interações sociais, e que podem ser modificados devido às interpretações. Para o Pensamento Matemático Avançado, os estudos de Tall e Vinner (1981), Vinner (1991) e Tall (1992) mostram uma relação do sujeito com o objeto a ser aprendido. O interacionismo simbólico, por sua vez, não mostra uma relação direta do sujeito com o objeto, e sim uma relação do sujeito e o objeto mediado pela sociedade. Entretanto, o interacionismo simbólico reconhece a importância da interação da pessoa e o objeto; nesse sentido, Blumer (1980) define o ser humano como um organismo agente no processo de autointeração. Assim, mesmo que as duas teorias focam em aspectos diferentes em relação à aprendizagem em termos do individual e do social, entendemos que são teorias compatíveis coma análise dos dados desta pesquisa, especialmente pelas interações produzidas pelos estudantes ao desenvolver o estudo sobre funções logarítmicas e suas derivadas.

2.3 Atividades exploratório-investigativas no ensino-aprendizagem de Cálculo

As concepções de atividades exploratórias e investigativas serão úteis para elaboração e análise das atividades referentes aos conteúdos de geometria e de funções no âmbito de nosso projeto e se diferem da resolução de problemas matemáticos. Nesse sentido, Fonseca, Brunheira e Ponte, (1999, p.94-95) consideram que

> [...] na resolução de problemas, tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar o caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes, a partir de dada situação. E um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

Segundo Ponte (2003), investigações matemáticas consistem em situações-problema desafiadoras e abertas, que permitem aos estudantes várias alternativas de exploração e investigação. Não obstante, as explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, geralmente utilizadas para introduzir um novo conteúdo ou para problematizar e produzir significados para determinado conceito matemático.

Apesar da diferença estabelecida entre as investigações matemáticas e as explorações, optamos em utilizarmos a expressão atividades exploratório-investigativas em nosso estudo para nos referirmos às tarefas/atividades elaboradas/adaptadas/propostas pelos estudantes de graduação e/ou pelos professores de Matemática.

Corroboramos com Viseu e Ponte (2009) no sentido de considerar que o material didático desempenha um importante papel na exploração e resolução das tarefas propostas e na construção de novo conhecimento. Os materiais baseados nas tecnologias digitais, especialmente desenvolvidos e implementados com a utilização de computador e de *softwares,* como o GeoGebra, vêm assumindo cada vez mais proeminência tanto no processo de ensino-aprendizagem quanto nas investigações centradas no ensino universitário de um tema específico. A utilização de materiais elaborados/adaptados baseados nas TDIC "permite realizar cálculos de um modo eficiente, facilita a organização e análise de dados, fornece imagens visuais dos conceitos matemáticos e apóia a atividade exploratória e investigativa dos alunos na realização dos seus trabalhos" (VISEU e PONTE, 2009, p. 389). As atividades produzidas consistem em materiais tecnológicos que podem ser entendidos como atividades de exploração ou de investigação matemática e serão sintetizadas na próxima seção.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como já destacamos, a investigação aqui retrata enquadra-se na perspectiva da pesquisa qualitativa. Os dados foram analisados a partir dos métodos e procedimentos de codificação e categorização (CHARMAZ, 2009) e da análise de conteúdo qualitativa (GRANEHEIM e LUNDMAN, 2004)

De acordo com Graneheim e Lundman (2004), na análise de conteúdo, em sua vertente qualitativa, o exame de um texto serve de apoio para apreender seu sentido simbólico. Nesta pesquisa foram realizadas as transcrições dos diálogos ocorridos durante o seminário, sob a responsabilidade de um grupo de três estudantes, contemplando o tema funções logarítmica e suas derivadas. O objetivo de toda análise de conteúdo é o de assinalar e classificar, de maneira objetiva, todas as unidades de sentido existentes no texto, além de permitir que sobressaiam do documento suas principais regularidades.

A análise e o estudo dos aportes teóricos que a fundamentaram foram distribuídos em seis etapas: apreciação global dos dados para começar a definição de nosso objeto de estudo e objetivo da pesquisa; estabelecimento de diretrizes para a seleção de dados e, assim, a seleção de gravações para transcrever; seleção e transcrição de dados coletados nas atividades e no seminário; definição de aportes teóricos na área do pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico; estudo da literatura a respeito do pensamento matemático avançado e definições matemáticas; a codificação e categorização dos dados.

A partir dos episódios selecionados, foi realizada uma codificação sistemática dos dados e uma subsequente categorização dos códigos sem referência aos aportes teóricos. Os aportes foram utilizados posteriormente como ótica para interpretar os resultados da categorização, visando a atingir o objetivo da pesquisa.

Nosso estudo se baseia na análise de conteúdo qualitativa, no qual optamos por analisar os dados de acordo com os métodos e procedimentos da análise de conteúdo, porque nela a codificação define a estrutura analítica para construir a análise dos dados. Dessa forma, a codificação propiciou um suporte para questionar de modo analítico os dados da pesquisa e nos levou a observar atentamente as ações contidas nos diálogos. Para Charmaz (2009, p.69), "codificar significa categorizar segmentos de dados com uma denominação concisa que, simultaneamente, resume e representa cada parte dos dados".

A codificação dos dados contidos nas transcrições do seminário foi realizada com uma codificação inicial, e, em seguida, requereu uma leitura atenta e focada nos dados, em busca de ideias analíticas. Separamos os dados de acordo com seu contexto, objetivando a elaboração de códigos, e organizamos de maneira que exprimissem ações. Neste sentido, codificamos os dados como ações com o uso da forma nominal do verbo no gerúndio, pois, a utilização de gerúndios na codificação auxilia o pesquisador a detectar processos e a se fixar nos dados, transmitindo uma forte sensação de ação e sequência (GLASER, 1978, *apud* CHARMAZ, 2009).

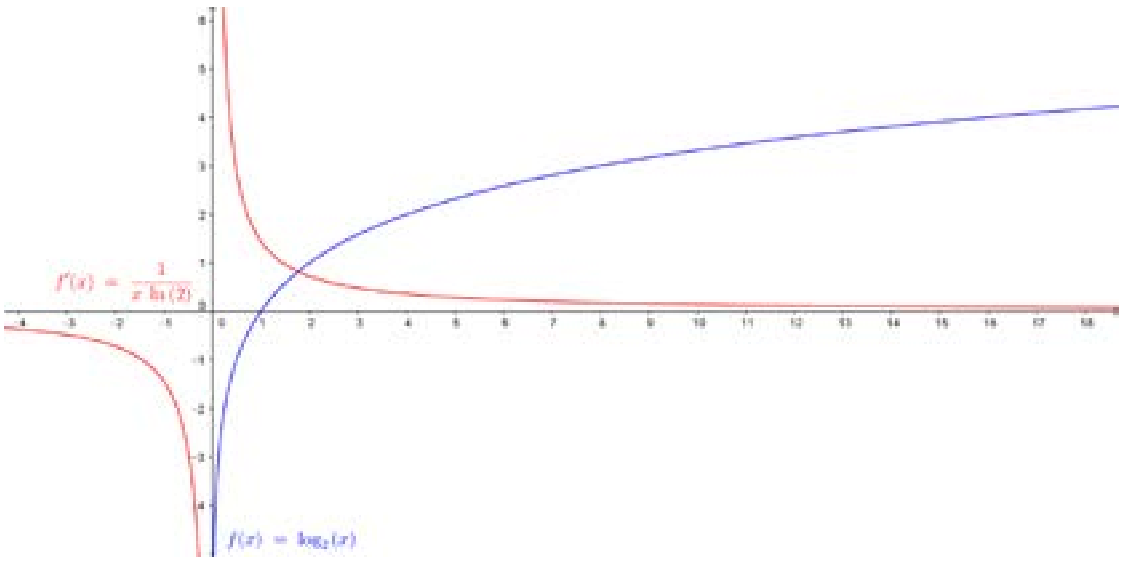
A redação dos resultados da análise de dados apresenta em detalhes o nome dos membros de cada grupo, o tema escolhido por eles, as transcrições dos diálogos selecionados para interpretação, além dos comentários feitos pelos professores, a saber, o regente da turma e a pesquisadora. Ressalta-se que os nomes aqui utilizados são fictícios para resguardar a identidade dos participantes deste estudo.

3. ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS: FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E SUAS DERIVADAS

Após o desenvolvimento de oito atividades exploratório-investigativas, foi proposto aos estudantes do curso Sistemas de Informação que realizassem um estudo relacionado às funções e suas derivadas e o apresentassem por meio de um seminário. Neste artigo analisamos o seminário apresentado pelo grupo constituído pelos acadêmicos Caio, Pedro e Walter. Esse grupo decidiu pesquisar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento de funções logarítmicas. Durante a apresentação surgiram diversas dúvidas que enriqueceram as discussões e interações entre aos acadêmicos e também entre os professores e os estudantes. Foram abordadas, além das funções logarítmicas, outras funções que possibilitaram novas discussões sobre domínio, conjunto imagem, ponto de inflexão, pontos de máximo e mínimo. Os conhecimentos mobilizados pelos estudantes revelaram tanto suas imagens conceituais sobre os temas abordados quanto produziram alguns conflitos relacionados às definições conceituais. Esses aspectos serão analisados a partir dos episódios selecionados e discutidos a seguir.

No início da apresentação do seminário, Caio plotou a função $f(x) = \log_2 x$ (Figura 1) e fez a leitura do gráfico de *f'(x)* no GeoGebra, considerando apenas o primeiro quadrante do plano cartesiano.

Figura 1: Representação Gráfica das funções $f(x) = \log_{2}^{x}$ e $f'(x) = \frac{x^{-1}}{\mathrm{h}\ 2}$



Fonte: Dados coletados para a pesquisa

O estudante apresentou a representação gráfica das funções, afirmando o seguinte: "eu percebi que se a função é crescente a derivada vai ser decrescente". Solicitamos que ele mostrasse como fazia essa leitura, visto que ele comentava a respeito da parte da função derivada que estava plotada pelo GeoGebra no primeiro quadrante, sem levar em conta a outra parte dessa representação plotada pelo *software* no terceiro quadrante. Em relação a essa interpretação do estudante e no sentido de auxiliar na compreensão da leitura da Figura 1, realizamos os seguintes questionamentos:

> Pesquisadora: Se essa parte de baixo [terceiro quadrante] não faz parte da função derivada, você podia tirar ela daí, então.
>
> Caio: Não consigo tirar.
>
> Pesquisadora: Entendem a dúvida de Caio?

Pedro: Sim, se a parte de baixo faz parte ou não da função derivada.

Jane: Lógico que faz, uai, como que você tira uma parte da função assim?

A discussão remeteu à reflexão relativa à questão: se o domínio da função $f(x) = \log_2 x$ consiste no conjunto de números reais positivos, sua derivada poderia ter um domínio mais amplo que o conjunto dos números reais positivos? Como mostrado por meio da representação gráfica realizada no GeoGebra, a função $f(x) = \log_2 x$ tem domínio $D = \{x \in R, x > 0\}$, sua derivada pode existir somente para valores de x > 0 ou é possível determinar a derivada de uma função *f* para intervalos não contemplados em seu domínio?

Nesse recorte, observamos que a imagem conceitual manifestada pelo Caio em relação ao gráfico da função derivada desta função corresponde ao que está associado apenas à curva no primeiro quadrante, pois, além de não fazer a leitura da parte do gráfico da função que aparecia no terceiro quadrante, ele tentou apagá-la com recursos do *software*. Não conseguindo, afirmou: "Não consigo tirar". Isto é, a forma gráfica da função faz parte das imagens mentais que se manifestaram em suas afirmações. Houve discussão entre os estudantes sobre o domínio da função

$$f'(x) = \frac{x^{-1}}{\ln 2}.$$

Pesquisadora:	Qual o domínio da função derivada?
Marcelo:	Domínio Real. Essa função é logarítmica? Porque, se ela for logarítmica, o domínio dela é maior que zero.
Luna:	A variável independente não está no Logaritmo. [Isto é, a variável x não é o logaritmando].
Pesquisadora:	A derivada de f(x) não é uma função logarítmica?
Jane:	Não, porque ln2 ali é constante, então aquele denominador se torna uma constante também. Então, não é logaritmo por causa disso, pra ser logaritmo o x... seria o mesmo que x sobre 2, ou 1 sobre x.ln 2.
Pesquisadora:	Ln 2 é um número?
Jane:	Sim, é uma constante, seria o mesmo que 1 sobre 2x, por exemplo.[A aluna considera ln2 igual ao número 2, e assim estabelece a seguinte igualdade: $\frac{x^{-1}}{\ln 2} = \frac{1}{2x}$]
Pesquisadora:	Aproximadamente quanto?
Jane:	Não sei.
Pesquisadora:	Então, a derivada de logaritmo de x na base 2 não é uma função logarítmica? O domínio dela pode ser real? Tem alguma restrição para o domínio da função?
Caio:	x não pode ser igual a zero, porque está embaixo. [x não pode ser zero porque está no denominador].

Pesquisadora: Então, esse gráfico que representa a função derivada, vocês acham que é só a parte de cima? Só a parte de baixo ou os dois? [a parte de baixo se refere ao 3º quadrante, e a parte de cima ao primeiro quadrante].

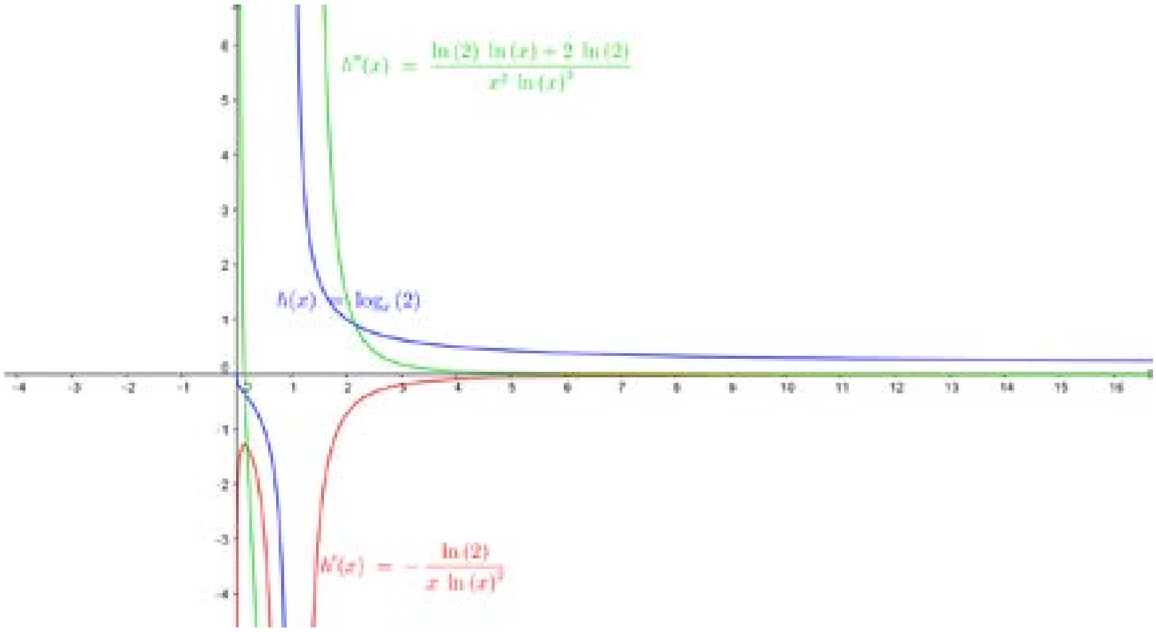
Esse diálogo nos leva ao seguinte questionamento: "Se o domínio da função é o conjunto de números reais positivos, sua derivada pode ter um domínio que possui além de reais positivos, reais negativos?". Observamos que não há uma compreensão dos estudantes em relação ao domínio da função $f'(x) = \frac{x^{-1}}{\text{h } 2}$ e à derivada da função $f(x) = \log_2^x$.

Outro aspecto que podemos destacar é a participação da estudante Jane, do grupo anterior, que traz importantes conceitos em relação ao logaritmo natural, e do estudante repetente Marcelo, que questiona se a função é logarítmica e especifica o domínio. A categoria "apresentando definição de conceitos" se destaca nesse grupo, e esclarecemos que, no início da apresentação, Caio apresentou um *slide* com a definição de função logarítmica e seu domínio: "Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a^x, x > 0, 0 < a \neq 1$ é denominada função logarítmica de base *a*. Nesse tipo de função, o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, pelo conjunto dos reais". Fundamentados nessa definição, Marcelo e Jane apresentam questionamentos se a função derivada seria ou não logarítmica, e argumentam sobre seu domínio. Portanto, a interação ocorrida entre os participantes propiciou a apresentação de definição de conceitos, possibilitando esclarecimentos e ressignificação da aprendizagem, avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem).

Após essa discussão, Caio resolveu mostrar a função $h(x) = \log_x^2$ (Figura 2) e as conclusões a que chegou. Esse estudo foi individual e desvinculado dos estudos dos outros membros do grupo, que estavam focados nas explorações que podiam realizar na função $f(x) = \log_2^x$. Caio, testando possibilidades, resolveu explorar a função $h(x) = \log_x^2$, e nessa função encontrou uma constante, o valor 0,14 (aproximadamente), fazendo a interseção entre a derivada segunda de *h(x)* e o eixo x. Ele estava tentando descobrir qual era o ponto máximolocal da derivada primeira; para isso, determinou a derivada segunda e percebeu que ela tinha umzero. Resolveu calcular esse valor por meio da intersecção do eixo x com a derivada segunda $h''(x)$.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

Figura 2: Representações Gráficas das funções $h(x) = \log_x^2$, $h'(x)$ e $h''(x)$



Fonte: Dados coletados para a pesquisa

Caio: Porque ela [ela refere a h'(x)] tem essa voltinha aqui, ela tem uma concavidade num intervalo bem pequeno, entre o zero e um, depois ela fica aqui, ou seja, estabelecemos um ponto máximo e eu fiquei curioso pra saber que ponto era esse, aí eu peguei a derivada dela [derivada de h'(x)] e calculei a interseção dela [h''(x)] com o eixo x pra saber qual era o ponto máximo. [Ele calculou o ponto de interseção entre o eixo x e h''(x)]. Deu 0,14. Ela [h'(x)] vai ser crescente até o 0,14 e decrescente até a abertura.

Caio estava analisando os intervalos nos quais $h'(x)$ era crescente ou decrescente; para isso, movimentou a janela de visualização do *software* para saber qual era o ponto mínimo da função $h'(x)$; essa função na concepção do estudante era representada por uma parábola. Nas funções do tipo $h(x) = \log_x^a$, que não são funções logarítmicas,o estudante disse ter testado várias funções variando os valores do número*a*. Quando ele diz até 100 mil, quer dizer que plotou no GeoGebraa função $h(x) = \log_x 100000$. Também fez outras funções desse tipo, variando o valor atribuido à constante *a*. "Explorando/testando funções e suas derivadas utilizando o GeoGebra" foi uma das categorias que emergiu a partir desse episódio. Essa descoberta despertou a curiosidade de muitos estudantes, pois nesse momento houve uma grande discussão em sala de aula. Alguns estudantes que estavam com seus notebooks fizeram testes atribuindo distintos valores para o logaritmando da referida função. Estavam interessados em verificar a validez ou não da conjectura proposta pelo Caio. A turma opinou sobre a situação e os estudantes realizaram explorações com o GeoGebra, consultaram seus cadernos para verificar os procedimentos necessáros para calcular a derivada de uma função logarítmica. Caio projetou a tela do GeoGebra com a função $h(x) = \log_x 100000$ plotada e realizou a interseção da derivada segunda dessa função com o eixo das abscissas, encontrando o número 0,14.

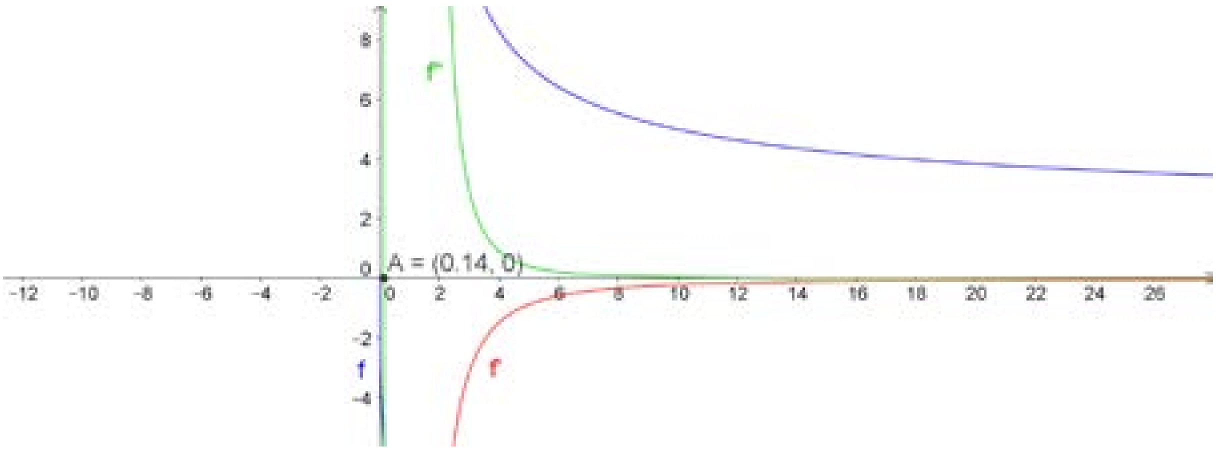
Questionamos o que a derivada segunda nos "diz" sobre a função, mas as respostas que obtivemos não se referiam às relações entre a derivada segunda e a função, e sim entre as derivadas primeira e segunda. Caio se preocupava com o número 0,14, mas insistimos no questionamento, particularmente porque havíamos explorado esses conceitos em uma atividade exploratório-investigativa trabalhada em sala. Pedro dizia que ozero da derivada segunda mostra que a função tem um ponto de inflexão, e Walter afirmava que a derivada segunda está relacionada com a concavidade da função e que nos remete também à existência de um mínimo ou máximo local. Toda essa discussão, desencadeada pelo número 0,14 que Caio afirmava que de acordo com suas explorações no GeoGebra parecia ter uma regularidade para os distintos valores numéricos utilizados como logaritmando da função, trouxe uma motivação para buscar a definição conceitual formal de vários conceitos envolvidos na situação-problema, pois, até então, os estudantes se referiam apenas às suas imagens conceituais.

De acordo com Vinner (1991, p. 12), na prática, a definição conceitual não é evocada durante o processo de resolução de um problema, pois os hábitos de pensamentos cotidianos se sobrepõem à necessidade de consultar a definição formal. Devido à curiosidade em relação ao porque a intersecção de *y = 0* com a derivada segunda das funções do tipo $h(x) = \log_x a$, geravam o número 0,14 para todo a > 0. Os estudantes recorreram às definições formais de máximo e mínimo local, de número crítico e de máximo e mínimo absoluto. Essa atitude é corroborada por Vinner (1991, p. 21), que afirmou que "enquanto a referência à imagem conceitual resultar em uma solução correta, o estudante permanecerá se referindo à imagem conceitual, já que esta estratégia é simples e natural". Enquanto se produzia as interações dos estudantes da turna com o Caio em relação à sua descoberta, estavam firmados em suas imagens conceituais. Entretanto, a partir do momento que se envolveram na busca de explicações para a existência do número 0,14, buscaram a definição estipulada de cada conceito, pois sentiram a necessidade de atribuirem significados específicos às essas definições formais.

Nesse sentido, constatamos que Caio seguia interessado em compreender as relações entre as derivadas primeira e segunda de uma função, conforme pode ser apreciado no episódio seguinte.

Caio:	Eu testei até o 100 mil. Não dormi à noite, fiz várias funções e sempre achei esse 0,14.
Professor:	Mas esse valor corresponde à abscissa do ponto máximo da função? Se você tomar como referência que a função, nesse caso, é a derivada primeira, e, se você derivá-la novamente, encontra a derivada segunda. Essa derivada segunda indica o máximo ou o mínimo. Se você procurar o máximo da derivada primeira, você vai encontrar esse valor aí na abscissa do ponto?
Caio:	Sim.
Professor:	Qual é o problema com esse número?
Caio:	Não entendo por que sempre dá 0,14.

Figura 3: Representação Gráfica das funções $f(x) = \log_x 100000$, $f'(x)$, $f''(x)$ e do ponto A (0,14; 0)



Fonte: Dados coletados para a pesquisa

Considerando o papel das definições, retomamos os registros do aluno Caio, destacando a função $f(x) = \log_x 100000$, que ele representou no GeoGebra, e as derivadas primeira e segunda dessa função:

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{h}\,(100000)}{\mathrm{h}\,(x)^2\,x} \text{ e } f''(x) = \frac{\mathrm{h}\,(x)\mathrm{h}\,(100000) + 2\,\mathrm{h}\,(100000)}{\mathrm{h}\,(x)^3\,x^2},$$ respectivamente.

O ponto A (0,14; 0) está na interseção entre o eixo das abscissas e a derivada segunda da função *f*.

Caio:	Vejam isso aqui. Essa é a função logaritmo de 100000 na base x. Vou calcular a derivada dela. A derivada vai ter o mesmo comportamento das outras funções que eu fiz. Agora vou encontrar a derivada segunda. Olha aqui a interseção da derivada segunda com o eixo x. Igual a 0,14 de novo. Não entendi porque sempre dá 0,14. A partir de 100000 eu assumi que sempre será 0,14.
Pesquisadora:	O que vocês acham disso, turma?
Pedro:	Bruxaria.

Todo o episódio descrito, com a riqueza de detalhes e a interação entre os participantes sobre as diversas definições e conceitos construídos com a experiência vivenciada pelo Caio durante as explorações realizadas sobre o tema, com a utilização do GeoGebra, remete-nos à reflexão sobre o papel das definições no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Ao tentar descobrir o ponto máximo da derivada primeira da função $h(x)=\log_{x}^{2}$, Caio determinou a derivada segunda e percebeu que ela tinha um zero. Resolveu calcular esse zero da função, ou seja, ao buscar obter a interseção entre o eixo x e a derivada segunda, encontrou a constante 0,14. Esse fato o levou a testar/explorar distintas ideias, envolvendo conceitos importantes relacionados às funções e suas derivadas, despertando e motivando também vários estudantes que participaram das discussões e explorações. Vinner (1991, p. 7), tomando como exemplo a forma como os estudantes compreendem o valor absoluto, ressaltou a importância de "levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos".

Consideramos que a maneira como os conceitos de funções e suas derivadas foram construídos, por meio das atividades exploratório-investigativas, encontramos, por exemplo, que os testes realizados pelo estudante Caio,utilizando recursos tecnológicos de Matemática Dinâmica, foram significativos, e evidenciaram duas categorias imprescindíveis ao estudo da Matemática: "Explorando/Testando funções e suas derivadas utilizando o GeoGebra" e "Avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem)".

Percebemos o avanço na compreensão de alguns estudantes quando o professor retomou a discussão sobre funções logarítmicas e suas derivadas. Procuramos estimular a reflexão do grupo sobre as funções que eles estavam propondo e se existia alguma diferença quando a variável independente estava situada no logaritmando ou na base do logaritmo. Na busca de formulação de respostas consistentes e matematicamente organizadas, os estudantes recorreram à definição formal de função logarítmica, plotaram no GeoGebra a função $f(x)=\log_{x}^{2}$, e analisaram seu domínio e o conjunto imagem. Perceberam que a função $f(x)=\log_x^2$ era distinta da função logarítmica, definida como $f(x)=\log_a^x, x>0, 0<a\neq 1$. Embora $f(x)=\log_x^2$ não seja uma função logarítmica, seu domínio está relacionado coma base *x* do logaritmo. Vinner (1991) afirma que definições podem ter papéis extremamente importantes, não apenas porque interferem na formação da imagem conceitual, mas porque frequentemente têm um papel crucial em atividades cognitivas.

Quando o estudante Caio disse: "Eu testei até o 100 mil. Não dormi à noite, fiz várias funções e sempre achei esse 0,14", percebemos interesse e persistência em descobrir se a interseção da derivada segunda com o eixo x daquele tipo de função seria sempre a constante 0,14. As interpretações que o estudante faz sobre esse número, as interações ocorridas, as imagens conceituais dele em torno das definições abordadas nos levam a considerar o significado na concepção interacionista. Blumer (1980, p. 117) nos diz, na terceira premissa, que "os significados são manipulados por um processo interpretativo (e por este modificados) utilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato". A busca de Caio por uma resposta, um significado, o levou a esse processo interpretativo consciente e reflexivo. Podemos observar que Caio manipulou os significados em relação à imagem conceitual da segunda derivada de uma função, no diálogo:

> Pesquisadora: Essa função tem ponto de inflexão? Se isso for um ponto de inflexão, o que a derivada segunda nos diz? A derivada segunda fala alguma coisa?
>
> Pedro: A raiz da derivada segunda mostra que tem um ponto de inflexão.
>
> Walter: Mostra se a concavidade é para cima ou para baixo.
>
> Pesquisadora: Quando calculamos a derivada segunda, o que acontece mesmo?
>
> Caio: A intercessão da derivada segunda com o eixo x é 0,14. Esse foi o ponto máximo da derivada.

Para Caio, a imagem conceitual da derivada segunda dizia mais que um ponto de inflexão ou a forma da concavidade. Para Blumer (1980), os objetos passam a ter significado para a pessoa quando há uma interpretação consciente desse objeto. O autor afirma que

> O agente seleciona, modera, susta, reagrupa e transforma os significados sob o ponto de vista da situação em que se encontra e da direção de seus atos. Por conseguinte, a interpretação não deveria ser considerada como uma mera aplicação automática de significados existentes, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados e trabalhados para orientar e formar as ações. Deve-se levar sempre em consideração que os significados desempenham seu papel na ação por intermédio de um

processo de autointeração. (BLUMER 1980, p. 122).

De acordo com o autor, o interacionismo simbólico considera que o significado é produzido a partir do processo de interação humana, como produto social, e que o "uso de significados por alguém em plena ação envolve um processo interpretativo". Seguindo esse raciocínio, podemos dizer que o estudante Caio se envolveu nesse processo interpretativo envolvendo diversos conceitos sobre funções e suas derivadas. No interacionismo simbólico, esse processo se chama mente. Para Haguette (1997, p. 32), "a mente é concebida por *Mead* como um processo que se manifesta sempre que o indivíduo interage consigo próprio usando símbolos significantes". De acordo com os episódios, constatamos que as interações ocorridas foram fundamentais para a interpretação e construção de significados, acentuando a importância das definições nos estudos realizados pelos grupos.

Antes de encerrar a apresentação do grupo, o professor retomou a discussão sobre a descoberta do número 0,14, esclarecendo a necessidade de se fazer uma análise algébrica para verificar se as conclusões testadas empiricamente são válidas em qualquer situação. Explicou sobre conjecturas em Matemática e discorreu sobre algumas descobertas realizadas por matemáticos ao longo da história.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa está centrada em um tema específico de Cálculo, que consiste no estudo das funções e de suas derivadas. Para isso, observamos como esse tema era proposto e desenvolvido pelos estudantes do curso Sistemas de Informação publicada Universidade Estadual de Montes Claros.

Inicialmente, foram elaboradas oito atividades exploratório-investigativas focadas na proposição de situações-problema, cuja solução foi realizada por grupos de estudantes durante as aulas práticas, especialmente desenvolvidas no laboratório de informática, com a utilização do GeoGebra. A partir de um processo de construção, os estudantes desenvolviam o processo de construção, o que lhes propiciava uma visualização dos conceitos, de maneira dinâmica e interativa, relacionados aos conceitos de funções e suas derivadas. Essas atividades requeriam que os estudantes, baseando nas explorações realizadas por meio do GeoGebra, enunciassem suas conclusões sobre as questões propostas e conceitos contemplados. A utilização das Tecnologias Digitais da Informação e da Comunicação, aplicadas ao processo de ensino-aprendizagem de funções e suas derivadas, foi relevante tanto para a visualização de representações gráficas referentes às questões propostas quanto para os questionamentos e interações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento dessas atividades, bem como para o estudo, preparação e apresentação do seminário pelos grupos de estudantes.

Nesse contexto, nosso objeto da análise dos dados da pesquisa de campo consistiu na comunicação matemática que utilizou definições matemáticas. Interpretamos esse objeto pela ótica do pensamento matemático avançado (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991; TALL, 1991). Tomando como referência principal os estudos de Tall e Vinner (1981), utilizamos os construtos *imagens conceituais* e *definições conceituais – pessoal* e *formal* – para realizar uma análise a respeito da compreensão dos estudantes sobre funções e suas derivadas com ênfase no uso de definições matemáticas (VINNER, 1991). Ao mesmo tempo, levamos em consideração as interações ocorridas em sala de aula segundo as ideias do interacionismo simbólico (BLUMER, 1980; GODINO e LLINARES, 2000). Consideramos que o espaço social em torno dos questionamentos levantados pelos estudantes durante o desenvolvimento das atividades e nas apresentações e discussões referentes aos questionamentos propostos ou emergentes delas revelou a importância da utilização das definições conceituais – formais e pessoais – para a compreensão e ressignificação dos conceitos matemáticos associados às funções e suas derivadas.

Referente a esse contexto, focamos nossas atenções nas interações que aconteceram durante as apresentações do seminário, entendendo a importância do momento, pois era um espaço no qual as vozes dos estudantes e os confrontos e argumentos emergentes das discussões produzidas evidenciaram incongruências entre definições pessoais e formais. Selecionamos para a análise os dados das discussões e interações com referência ao objetivo desta pesquisa, obtidos a partir dos estudos realizados pelos estudantes enfatizando representações gráficas das funções e suas derivadas, elaboradas por meio de um *software* com representação gráfica dinâmica.

A análise dos dados revelou que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluiu a partir das interações produzidas entre os estudantes e, entre eles com o professor e a pesquisadora, o que interpretamos por meio da análise dos distintos episódios. Particularmente neste artigo, analisamos os dados relativos ao seminário apresentado por um grupo constituído por três estudantes que resolveu pesquisar sobre o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento de funções logarítmicas. Observamos que houve uma discussão inicial relacionada ao domínio de uma função logarítmica e ao domínio de sua derivada. Ao plotar ambas as funções no GeoGebra, o *software* não restringiu o esboço do gráfico, o que provocou vários questionamentos sobre a relação entre o domínio da função derivada e o domínio da função dada. Isto ressalta a importância do conhecimento matemático do professor e dos estudantes, bem como uma atitude questionadora e reflexiva diante do processo de ensino-aprendizagem dos distintos temas de Cálculo.

A partir da análise dos episódios selecionados, consideramos que a interação é social, e apesar de que os alunos individualmente manifestam diversas imagens conceituais, elas são produzidas socialmente e podem ser modificadas pelo estudante durante as interações produzidas em um contexto específico, como foi o caso do seminário realizado para que os estudantes apresentassem, discutissem e formalizassem os conceitos relacionados com distintas funções e suas derivadas. Tall (1995) propõe a distinção entre a Matemática elementar, na qual os objetos são descritos e a Matemática avançada, na qual os objetos são definidos formalmente. Nesta pesquisa entendemos a compreensão individual de um conceito na concepção de imagem conceitual de Tall e Vinner (1981, p. 2), para os quais o termo imagem conceitual está utilizado para descrever "a estrutura cognitiva total que associa com o conceito, que inclui todos os retratos e propriedades associadas e processos". Assim, todos os atributos mentais associados ao conceito conscientes ou inconscientemente devem ser incluídos na imagem conceitual.

Na concepção de Blumer (1980), o objeto pode ter diferentes significados para distintas pessoas e o indivíduo forma, mantém e transforma os objetos de seu universo, à medida que lhes concede significado. Entendemos que essa ideia é coerente com o que Tall e Vinner (1981) referem como imagens conceituais diferentes para distintas pessoas. Consideramos que à medida que o pensamento se desenvolve, tornando-se mais complexo, as ações sobre os objetos conduzem ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Esse pensamento remete à imagem-raiz do interacionismo que entende "o ser humano como um organismo agente". Blumer (1980) considera que devido ao homem se empenhar na autointeração, ele precisa lidar com o que observa, portanto, quando entra em contato com o que verifica, atribui-lhe um significado, criado e modificado pela interação social e utilizado como fundamento que norteará suas ações. Godino e Llinares (2000) consideram que desde a perspectiva interacionista o significado é desenvolvido por meio da interpretação e interação.

No desenvolvimento do seminário, identificamos a ocorrência de todas as categorias codificadas. O uso de definições pessoais foi inicialmente baseado em experiências prévias dos estudantes e, posteriormente, modificadas a partir das interações produzidas entre os estudantes, bem como entre os professores (professor da turma e pesquisadora) e estudantes. Nesse sentido, corroboramos com Blumer (1980) ao considerar que os significados são manipulados, podendo ser modificados, por um processo interpretativoutilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato. Nessa concepção, entendemos que as interações ocorridas foram fundamentais para o êxito na aprendizagem dos estudantes uma vez que colaboraram com a ressignificação de conceitos de Cálculo, como de funções logarítmicas e suas derivadas.

Esperamos que os relatos e reflexões abordados neste trabalho possam contribuir com os professores que ensinam Matemática no ensino superior para a realização do planejamento de atividades e implementação do processo de ensino-aprendizagem dos distintos temas abordados pelo Cálculo Diferencial e Integral. Compreender a maneira como os estudantes manifestam seus pensamentos, pautados nas definições matemáticas, e atribuir sentido ao que eles expressam podem contribuir com a melhoria do processo de ensino-aprendizagem e com o desenvolvimento dos Conhecimentos Didático-Matemático dos estudantes (PINO-FAN e GODINO, 2015). Somos conscientes da necessidade de realização de pesquisas centradas no processo de ensino-aprendizagem de tópicos de Cálculo, visando à construção de significados e o desenvolvimento de interações e reflexões no contexto escolar que privilegiem o desenvolvimento do pensamento matemático avançado dos estudantes universitários.

5. REFERÊNCIAS

BLUMER, Herbert. A natureza do interacionismo simbólico. In: MORTENSEN, Charles David. (Org). **Teoria da comunicação**: textos básicos. São Paulo: Mosaico, 1980, p 119-137.

CHARMAZ, Kathy. **A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa.**Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CRISOSTOMO, Edson. **Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemática**: una aproximación desde la investigación didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. 2012. 546f. Tese (Doctorado en Didáctica de la Matemática). Universidade de Granada, Granada.

CRISOSTOMO, Edson. Idoneidad didáctica de procesos de estudio de la integral en la formación de profesores de matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 2, p. 236-253, mar./abr. 2017.

CYRINO, Márcia Maria de Costa Trindade; BALDINI, Loreni Aparecida Pereira. Ações da formadora e a dinâmica de uma comunidade de prática na constituição/mobilização de TPACK. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 25-48, 2017.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

FONSECA, Helena; BRUNHEIRA, Lina; PONTE, João Pedro. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. In: PROFMAT, 1999, Lisboa, Portugal. **Actas do ProfMat**. Lisboa: APM, 1999, p. 91-101.

GALL, Meredith; BORG, Raymond; GALL, Joyce. **Educational Research**. 6 ed. White Plains, NY: Longman Publishers, 1996.

GODINO, Juan Díaz.; LLINARES, Salvador. El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. **Revista Educación Matemática**, México, v. 12, n. 1, p. 70-92, 2000.

GRANEHEIM, Ulla Hällgren; LUNDMAN, Berit. Qualitative content analysis in nursing research: Concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness. **Nurse Education Today**, v. 24, n. 2, p. 105-112, 2004. DOI: 10.1016/j.nedt.2003.10.001.

HAGUETTE, Teresa Maria Frota. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 3. ed. Petrópolis, Vozes, 1997.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, Maria Clara Resende; NASSER, Lilian. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 11-26.

LOPES, Rieuse. **Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do Cálculo**. 2014. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

MAMONA-DOWNS, Joanna; DOWNS, Martin. Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In: ENGLISH, Lyn (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**. London: Lawrence Erlbaum Associates, 2002, p. 165-195.

MEYER, Cristina. Derivada/reta tangente: imagem conceitual e definição conceitual. 2003. 159f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PINO-FAN, Luis Roberto; GODINO, Juan Díaz. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, v. 36, n. 1, p. 87-109, jun. 2015.

PONTE, João Pedro. Investigar, ensinar e aprender. In: PROFMAT, 2003, Lisboa, Portugal. **Actas do Profmat**. Lisboa: APM, 2003, p. 25-39.

TALL, David. Functions and calculus. In: BISHOP, Alan et al. (Eds.), **International Handbook of Mathematics Education**. Netherland: Kluwer Academic Publishers, p. 289-325, 1996.

TALL, David. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife, Brasil, 1995. p. 61-75. v. I.

TALL, David. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In: GROWS, Douglas A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992, p. 496.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3-21.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: **Published in Educational Studies in Mathematics**. University of Warwick. 1981. p. 151–169.

VINNER, Shlomo. The Role of Definitions in Teaching and Learning. In: Tall, David (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.

VINNER, Shlomo. Concept definition, concept image and the notion of function, **The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 14, p. 293-305, 1983.

VINNER, Shlomo; HERSHKOWITZ, Rina. Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts, **Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,** Berkeley, p. 177-184, 1980.

VISEU, Floriano; PONTE, João Pedro. Desenvolvimento do conhecimento didático do futuro professor de Matemática com apoio das TIC. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. v. 12, n. 3, p. 383-413. 2009.