REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO
ISSN 1981-6979
VOLUME 11, NÚMERO 1. PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

MODELAGEM MATEMÁTICA ONLINE: TEMAS MATEMÁTICOS, PODERES NATURAIS E ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS

ONLINE MATHEMATICAL MODELING: mathematical themes, natural powers and pedagogical strategies

Rhômulo Oliveira Menezes[1]

Roberta Modesto Braga[2]

Adilson Oliveira do Espírito Santo[3]

RESUMO

Assumimos como objetivo neste estudo qualitativo investigar que/como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Caminhando com Carol no ambiente online VMTcG. A tarefa foi desenvolvida no curso "Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG", em 2018. Os encontros síncronos no ambiente online Virtual Math Teams com GeoGebra contou com a participação de graduandos do curso de Matemática. Os dados foram produzidos pelos graduandos no ambiente online permitindo posterior acesso aos chats, às construções feitas no quadro branco e às construções feitas no GeoGebra. Para análise dos dados utilizamos as quatro fases de análise de chats. Para análise dos dados usamos como base teórica os conceito de temas, poderes e estratégias, de Mason e colaboradores. Os resultados encontrados indicam que características da tarefa de Modelagem Matemática e a condução (estratégias) adotada pelo mediador repercutiram no uso de poderes matemáticos pelos estudantes e no aparecimento e uso de temas matemáticos, ambos podendo ser ampliados ou contraídos pelos espaços de interações do VMTcG.

Palavras-chave: Tarefas de Modelagem Matemática. VMTcG. Poderes Matemáticos. Estratégias Pedagógicas. Temas Matemáticos.

ABSTRACT

The objective of this qualitative study is to investigate what/how interactions appeared between students, mediator and mathematical content, during the synchronous development of the task Walking with Carol in the online environment VMTcG. The task was developed in the course "Interactions and Modeling Strategies in the VMTcG environment", in 2018. The synchronous meetings in the Virtual Math Teams online environment with GeoGebra were attended by undergraduates from the Mathematics course. The data was produced by undergraduates in the online environment, allowing subsequent access to chats, constructions made on the whiteboard and constructions made in GeoGebra. To analyze the data, we used the four phases of chat analysis. To analyze the data, we used the concepts of themes, powers and strategies, by Mason and collaborators, as a theoretical basis. The results found indicate that characteristics of the Mathematical Modeling task and the guidance (strategies) adopted by the mediator had an impact on the use of mathematical powers by students and the appearance and use of mathematical themes, both of which can be expanded or contracted by the VMTcG interaction spaces.

Keywords: Mathematical Modeling Tasks. VMTcG. Mathematical Powers. Pedagogical Strategies. Mathematical Themes.

1 Secretaria de Estado de Educação do Estado do Pará (SEDUC/PA) - rhomulo.menezes4542@escola.seduc.pa.gov.br
2 Universidade Federal do Pará (UFPA) – robertabraga@ufpa.br
3 Universidade Federal do Pará (UFPA) – adilson@ufpa.br

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

INTRODUÇÃO

O presente artigo constitui um recorte da tese de doutorado do primeiro autor e considera interações que emergiram no desenvolvimento *online* e síncrono de uma tarefa de Modelagem Matemática. Tais interações emergem do mediador, dos participantes e dos conteúdos matemáticos em torno de uma tarefa de Modelagem Matemática elaborada e executada para o ensino de tópicos de geometria plana, traçando interlocuções teóricas com poderes naturais e matemáticos, constructos e estratégias pedagógicas, e temas matemáticos. A ambiência para o ensino de tópicos de geometria plana foi construída embasada em autores de Modelagem Matemática e Educação Online (EO).

Sobre Modelagem Matemática identificamos analisando as concepções de Bassanezi (2012), Biembengut (2016), Barbosa (2001), Burak (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), as quais são distintas no que tange ao local e nível que são aplicadas, superior ou básico, e se alteram conforme o contexto cultural, social e histórico dos pesquisadores/professores e dos alunos. No entanto, mesmo os autores imbuídos de diferentes modos de perceber, conceber e fazer Modelagem Matemática, foi possível traçar características comuns, que atravessam essas concepções e que influenciam nosso modo de perceber a Modelagem Matemática, sendo elas: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

Sobre Educação Online, Souza e Bairral (2016) destacam cinco características que podem auxiliar o professor na arquitetura do design de práticas em EO: favorecer a hipertextualidade e multimodalidade discursiva, com a integração de linguagens diversas; potencializar interações síncronas; criar um ambiente e propor uma atividade que o conhecimento seja construído em um processo comunicativo de negociação e tomada de decisões que considerem experiências e atitudes derivadas do universo cultural dos envolvidos; promover a proposição de problemas criativos e autorais mediante reflexões com espírito colaborativo. A escolha do ambiente, a tarefa, as tecnologias, as estratégias em EO são elaboradas e acompanhadas pelo professor ou a equipe que efetivará as práticas. É importante ressaltar que não basta ter a tarefa perfeita sem um ambiente que ofereça condições para o seu desenvolvimento.

De acordo com Menezes (2019) e Menezes e Bairral (2021) existem poucos trabalhos que articulam Modelagem Matemática e atividades de Educação Online, e desses poucos trabalhos, menor ainda é o número daqueles que as pesquisas investigaram atividades de Modelagem Matemática voltadas para o ensino de matemática, desenvolvidas de forma online e totalmente síncrona, revelando esse contexto como promissor para desenvolvimento da pesquisa.

Para Menezes (2021), tarefas de Modelagem Matemática constituem uma atividade formativa profícua para a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes e temas matemáticos. Nesse contexto, os poderes naturais, entendidos como processos matemáticos dos alunos, que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula, configuram poderes matemáticos. As estratégias pedagógicas são derivadas de constructos pedagógicos, que informam e embasam práticas pedagógicas, quando o professor se vê diante de acontecimentos do seu cotidiano de sala de aula, e os temas matemáticos são entendidos como intrínsecos aos conteúdos matemáticos, por permeá-los revelando conexões ou elos.

Partindo desse cenário, apresentamos uma ambiência construída para ensejar interações entre ensino e aprendizagem em uma tarefa de Modelagem Matemática voltada para o ensino de tópicos de geometria euclidiana, capaz de responder a seguinte questão de investigação: Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Caminhando com Carol no ambiente online

VMTcG? O artigo está organizado em cinco seções a contar desta introdução: na segunda seção, apresentamos discussões de conceitos, como temas matemáticos associados às interações dos conteúdos matemáticos, poderes matemáticos associados às interações dos estudantes, e estratégias pedagógicas associadas às interações do professor; na terceira seção, descrevemos e justificamos as escolhas metodológicas, tanto a respeito dos procedimentos de produção, quanto de análise de dados produzidos; na quarta seção, destacamos e analisamos as interações dos conteúdos matemáticos dos estudantes e do mediador, segundo os conceitos temas matemáticos, poderes matemáticos e estratégias pedagógicas; concluindo, este artigo, na quinta seção.

TEMAS MATEMÁTICOS, PODERES NATURAIS E CONSTRUCTOS PEDAGÓGICOS

Nesta seção discutimos conceitos como: temas matemáticos, poderes naturais e matemáticos, constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas. Os temas matemáticos entendidos como intrínsecos aos conteúdos matemáticos por permeá-los revelando conexões ou elos, sendo eles: liberdade e restrição; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança. Os poderes naturais entendidos como processos matemáticos que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula configuram pares de poderes matemáticos, como: liberdade e limitação; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança. E as estratégias pedagógicas derivadas de constructos pedagógicos que informam e embasam práticas pedagógicas quando o professor/pesquisador se vê diante de acontecimentos do seu cotidiano de sala de aula, sendo consideradas neste trabalho as estratégias pedagógicas: diga o que vê, mesmo e diferente, outro e outro, de quantas maneiras, transforme um fazer em um desfazer, andaimes e enfraquecimento, exemplos construídos pelos alunos, desviar a atenção para automatizar, o ensino de técnicas.

TEMAS MATEMÁTICOS

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) existem vários temas intrínsecos à Matemática, que foram identificados por pensadores diferentes ao longo dos séculos, que são úteis para revelar conexões ou elos entre conteúdos matemáticos que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. São eles: liberdade e limitação; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança.

Foster *et al.* (2005) consideram que em Matemática as limitações dos axiomas, leis e propriedades são necessárias para resolver problemas matemáticos. Neste sentindo, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os problemas começam por algum objeto matemático (talvez um número, ou uma forma) indefinido ou arbitrário, no qual se impõe limitações, e de acordo com cada limitação, é possível saber se existe liberdade suficiente para que alguns objetos atendam a essa limitação. Utilizando objetos matemáticos como pontos e retas, Johnston-Wilder e Mason (2005) ilustram os temas liberdade e limitação:

> Um ponto tem liberdade de estar em qualquer lugar no espaço; dois pontos distintos determinam um segmento de reta, sendo este livre para estar em qualquer lugar no espaço e ter qualquer comprimento (diferente de zero); um terceiro ponto, ponto médio dos dois primeiros, está limitado pelas escolhas feitas para esses dois primeiros pontos, ao passo que a livre escolha para um quarto ponto na reta tem certa liberdade, porém, está limitado a estar na reta. Essas observações triviais têm consequências

> de longo alcance. Configurações mais complicadas de pontos, retas, triângulos, círculos, e assim por diante produzem liberdades e limitações mais sofisticadas (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p.228-232, tradução nossa).

Em Foster *et al.* (2005), os autores reconhecem que essas limitações são tão implícitas na Matemática que, na maioria das vezes, parecem quase que intuitivas. Conhecer, por exemplo, as propriedades de quadrados, retângulos, ajudaria a pensar no que acontece quando esses objetos são manipulados. Permitiria comparações ou observações sobre a álgebra envolvida, para se obter as medidas de suas diagonais ou as relações entre seus parâmetros. Assim, essas limitações gerais fornecem uma espinha dorsal para o aprendizado de Matemática (FOSTER *et al.*, 2005).

Sobre construção e manipulação de formas geométricas, na intenção de trabalhar suas propriedades, Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que ambientes de Geometria Dinâmica são frutíferos na exploração das noções de liberdade e limitação, ao oferecerem analogias entre construção e raciocínio axiomático. De acordo com os autores, as construções dependem dos elementos e, portanto, criam dependências ou limitações. O raciocínio é baseado em suposições acordadas, análogas às escolhas livres nas construções. As deduções subsequentes correspondem às limitações. Assim, trabalhar com softwares de Geometria Dinâmica pode oferecer aos alunos oportunidades de experimentar a estrutura de dependências de construção, correspondente à estrutura de cadeias de raciocínio, em que um resultado depende de resultados previamente deduzidos (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Para Johnston-Wilder e Mason (2005), a utilidade da busca dos temas liberdade e limitação, quando conteúdos matemáticos são abordados nas aulas, está em estimular os alunos na tomada de consciência sobre escolhas que podem fazer e incentivá-los a fazer essas escolhas. Permitindo, desta maneira, que eles sintam que estão envolvidos e participando das aulas, sendo esse sentimento de envolvimento e participação a principal fonte de motivação. Dessa forma, os autores entendem que explorar esses temas nas aulas, que são próprios dos conteúdos matemáticos, ajuda a fazer com que a disciplina seja vista como uma atividade construtiva, ao invés de uma coleção de técnicas para resolver problemas pré-determinados.

Para Mason (2018), os temas fazer e desfazer referem-se à reversão do que é conhecido e do que é procurado. Assim, dado determinado triângulo é possível construir e encontrar as medianas, alturas, bissetrizes, que são consideradas por Johnston-Wilder e Mason (2005) como um fazer, sendo pré-determinadas pelo triângulo dado. Todavia, cada um pode ser transformado em um desfazer, como exemplificam os autores sobre uma reversão do que pode ser solicitado aos alunos. Neste caso, ao invés de pedir para eles construírem as medianas de determinado triângulo, os autores sugerem que dadas as medianas (ou alturas, ou bissetrizes), se construa todos os triângulos possíveis.

Nesse contexto, Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que o fazer geralmente resulta em uma única resposta, como no caso do triângulo em que é possível construir as medianas, no entanto elas estão condicionadas ao triângulo dado. Por outro lado, o desfazer corresponde geralmente a toda uma classe de respostas, já que é oportunizado dimensões de liberdade para explorar, como no caso em que se apresenta as mediadas e é pedido para que se encontrem todos os triângulos possíveis.

Além das possibilidades de exploração, Johnston-Wilder e Mason (2005) destacam nos temas fazer e desfazer a solicitação de criatividade, já que são necessários mais discernimento e engenhosidade. Acrescentam, ainda, que uma boa maneira de proceder é tentar casos particulares (especializados), para detectar alguma estrutura comum subjacente (generalização).

Do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais a noção de número dos alunos é ampliada a cada ano. Começa nos naturais, passando para os inteiros, racionais, até chegar aos reais. Assim, ao restringir ou estender a atenção – a restrição de domínios de funções ou a extensão de domínios para dimensões mais altas – a importação de definições pode ser enriquecida e os teoremas estruturais elucidados.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Nesse contexto, se tem configurada pelos autores uma cadeia de objetos matemáticos é c em que a noção de substruturas, subespaços, subgrupos, subcategorias, e outros sub, surge da restrição da atenção, e as técnicas para construir novos objetos a partir de anteriores fornecem exemplos de extensão (BADGER *et al.,* 2012).

Na Geometria encontramos exemplos de casos específicos (restringir), que podem avançar para casos mais gerais (estender). Por exemplo, é possível chamar a atenção dos alunos para a ideia de quadrado, pontuando propriedades do quadrado, como quatro lados congruentes e ângulos retos. Dessa ideia é possível avançar para a ideia de losango, de retângulo, de paralelogramo. Um como sendo caso especial do outro, já que algo é um caso especial de outra coisa, quando todos os teoremas para o mais geral permanecem verdadeiros para a propriedade particular (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005).

Assim, entendemos que ao usar um objeto matemático anterior para trazer a ideia do próximo, se está estendendo a atenção dos alunos, e ao focar em um objeto matemático em detrimento dos outros, se está restringindo a atenção dos alunos. Para Johnston-Wilder e Mason (2005) restringir é necessário para concentrar a atenção dos alunos em certos objetos. Enquanto que estender a atenção, permite aos alunos considerarem o intervalo de alterações possíveis de um parâmetro, conceito, tarefa, forma, e assim por diante, ajudando-os a considerar o alcance das mudanças possíveis.

PODERES NATURAIS E MATEMÁTICOS

Os poderes naturais se referem às habilidades inatas que os alunos possuem em relação a conceitos matemáticos e à capacidade de desenvolver essas habilidades. Dessa forma, os poderes matemáticos são os poderes naturais explorados nas aulas de Matemática. Como são elementos vindos de fora da escola os alunos precisam sentir que esses poderes estão sendo considerados, usados, que são bem vindos às aulas, ao invés de serem suprimidos ou ignorados. Entre esses poderes: imaginar e expressar o que é imaginado; particularizar/especializar e generalizar; conjecturar e convencer a si e aos outros; organizar e classificar; estão envolvidos em toda a criação de sentido humano, mas formam um núcleo de fazer sentido matemático (MASON, 2004, p. 1).

Sobre imaginar e expressar o que é imaginado, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que toda criança é capaz de imaginar e esse poder é importante, porque é o principal meio de aproveitar as emoções, por exemplo, imaginar como você agirá ou será no futuro, ou o que deveria ter feito no passado. Ao final de uma discussão quantas vezes não simulamos em nossas mentes maneiras diferentes de argumentar sobre determinado assunto ou uma resposta decisiva para encerrar a discussão? Ou quando fazemos planos futuros, imaginando como estaremos na nossa profissão ou na relação com uma pessoa que gostamos. Assim, é por meio da imaginação que as pessoas são capazes de contemplar o que não está no tempo presente.

Os autores trazem metáforas como “ver”, usada comumente pelas pessoas para se referirem ao que fazem em suas cabeças. Ou seja, “ver imagens em suas mentes” permite simular situações, traçar formas de agir sobre determinado contexto. No entanto, mesmo parte significativa da população não entendendo o que essas pessoas estão falando (pela dificuldade que se tem de transportar outra pessoa para uma situação que se imaginou), todo mundo possui a capacidade de imaginar e posteriormente desenhar ou descrever o que imaginou, expressar.

Desta maneira, por meio das imagens mentais, é possível ter acesso a uma ampla variedade de casos, incluindo o muito grande ou o muito pequeno, como por exemplo, a faixa de ângulos possíveis em um triângulo ou o intervalo de tamanhos possíveis nos lados de um triângulo. Sendo através do poder de imaginar que se acessa à generalidade.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Para os autores o domínio da Geometria mostra-se poderoso para desenvolver o poder de imaginar, e expressar para os outros o que se imaginou. Porém, mesmo parecendo em um primeiro momento simples descrever o que se imagina para terceiros, tal ação não é. Johnston-Wilder e Mason (2005), no contexto da sala de aula, destacam que aprender a descrever para si o que se imaginou é um exercício poderoso, pois fornece aos alunos algo que eles podem fazer, caso fiquem presos em alguma situação.

De que forma o poder de imaginar e expressar acaba sendo deixado de lado na aula de matemática? Identificamos em Mason (2007), que se os alunos trabalharem apenas com o que está presente a eles (objetos físicos, diagramas já desenhados, expressões simbólicas já formadas), eles provavelmente se sentirão sem poder. Agora, se os alunos forem convidados a imaginar o que não está presente, discernir detalhes, buscar relações, identificar propriedades e, acima de tudo, ir além do que está presente no mundo sensível, então seus poderes de imaginação serão usados frutuosamente ao invés de trivialmente.

Sobre a postura do professor, Johnston-Wilder e Mason (2005) sugerem que ele estimule os alunos com instruções no imperativo como imagine isso, faça isso ou faça aquilo. Após algumas instruções o professor pode dar uma pausa e posteriormente pedir aos alunos que descrevam o que imaginaram um para o outro. Assim, mediante diferenças que podem aparecer e representações que podem ser desenhadas, a negociação de interpretações para se chegar ao entendimento comum pode iniciar.

A generalização está no cerne da matemática. De maneira complementar e oposta à generalização, Mason (2008) destaca outro poder, a particularização ou a especialização, pois “adotar uma atitude indutiva requer transitar das observações particulares às generalizações, ou seja, das mais concretas observações às mais sofisticadas generalizações” (POLYA, 1957 *apud* MASON, 2008, p. 63).

Mason, Burton e Stacey (1982) destacam o poder especializar em situações que podem acontecer no cotidiano, e entendem que os alunos quando encontram e se debruçam sobre uma situação concreta do cotidiano ou do contexto da matemática, eles se especializam no manuseio de objetos sensíveis ou matemáticos (desenhos geométricos, números, símbolos algébricos) desse caso particular.

Muitas situações do cotidiano envolvem relações geométricas. O uso do desenho geométrico ajuda a excluir elementos irrelevantes para que relações relevantes possam ser representadas. Esses elementos, muitas vezes irrelevantes são características da situação física, que não foram consideradas para a construção do seu desenho (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005). Dessa forma, reconhecer um desenho como captura da estrutura essencial de uma situação cotidiana é uma forma de generalização.

Para Johnston-Wilder e Mason (2005), aprender a reconhecer representações diferentes da mesma situação envolve um desenvolvimento sofisticado, desde comparar entre elementos distintos até reconhecer relações e perceber propriedades, que podem ou não se manter quando as condições variam. Assim, algo só pode ser percebido como uma propriedade quando os alunos tomam consciência do que é permitido variar e das dimensões da variação possível na situação.

Johnston-Wilder e Mason (2005) consideram que a conjectura é uma forma de trabalhar, no qual as ideias são desenvolvidas pelos alunos que pensam em voz alta ou explicitamente de outra maneira. Tudo que é dito, é pensado e testado por aqueles que estão ouvindo. As pessoas precisam de confirmações vindas de seus pares. Elas possuem incertezas e esperam obter ajuda de outras pessoas para articular o que pensam que estão “vendo” ou pensando.

Assim, uma atmosfera de conjectura enseja nos alunos expressarem hipóteses quando eles não têm certeza, e os alunos aproveitam essa oportunidade para ouvir outros pontos de vista, desencadeando modificações, amplificações, contraexemplos. Não cabendo nessa atmosfera afirmações como “isso está errado...”, pelo contrário, cultiva-se desafios como “eu convido você a modificar sua conjectura”, promovendo contrapontos (MASON e JOHNSTON-WILDER, 2004, p. 141).

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Essa atmosfera não é potente somente no campo do ensino. Os matemáticos articulam-se melhor em uma atmosfera de pensamentos e suposições, na qual conjecturas são experimentadas e modificadas. As afirmações derivadas desses experimentos são usadas pelos matemáticos para convencer seus pares, que por sua vez sentem-se desafiados a encontrar "contraexemplos" para essas afirmações.

Dessa forma, o pensamento matemático é aprofundado por períodos de trabalho individual, fomentado pela especialização e pela generalização, seguido de ensaios de conjecturas do que foi imaginado em períodos de negociação coletiva, com a finalidade de encontrar maneiras de modificar o enunciado conjecturado, que bloqueiem contraexemplos (MASON, 2008).

Nessa maneira de trabalhar todos assumem a responsabilidade de dar sentido ao que é dito pelos outros, e qualquer um pode ser solicitado a explicar seu pensamento, isto é, tentar convencer os outros envolvidos. Para desenvolver esses poderes nos alunos, a escola pode contribuir ao gerar uma atmosfera de conjectura, considerando a importância social de se desenvolver uma maneira cuidadosa, ouvinte e desafiadora de se interagir com os outros alunos.

Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os seres humanos constroem sentido a partir da organização e classificação de experiências. Por exemplo, o consenso de não colocar para secar juntos roupas e pratos são formas de ordem importante no mundo material, sendo metáforas úteis para trabalhar nos mundos: mental, simbólico e social. A ação de classificar exige que algumas características consideradas relevantes sejam enfatizadas em detrimento de outras, que são deixadas de lado.

A classificação e a organização de objetos são típicas de tarefas desafiadoras que estimulam as crianças. Mason (2008) exemplifica que a classificação de miçangas por cor e tamanho, ou então a classificação de blocos por cor, tamanho, espessura, cor e tamanho, cor e espessura etc., ocupam crianças por horas. Essas atividades são importantes na medida em que exercitam e desenvolvem o controle motor, ao mesmo tempo em que os levam a discriminar/ignorar/experimentar de acordo com atributos e associações particulares.

Em relação a esses poderes aplicados na Matemática: números são rapidamente classificados em pares e ímpares, de acordo com o último algarismo, ou então, ao dividir os números por dois, o que requer algum trabalho explícito. Como ocorre ao reconhecer e nomear polígonos segundo vértices e arestas, em que se apontam relações entre o número de vértices e o número de arestas, permitindo caracterizar a forma do polígono.

Dessa forma, Johnston-Wilder e Mason (2005) entendem que cada ato de ordenação envolve enfatizar algumas características (relevantes) e ignorar outras, o que requer a capacidade de discriminar qualidades (generalidades e propriedades), que estão sendo usadas para classificar. Tipicamente encontra-se tarefas de classificação em que aparecem representações numéricas ou geométricas, nas quais os alunos precisam dizer o que é um e o que é outro. Esse tipo de tarefa só mostra a perspectiva de quem elaborou a tarefa, não estando interessada nas experiências e nas representações trazidas pelos alunos. Nesse cenário entendemos Johnston-Wilder e Mason (2005), quando apontam esse tipo de tarefa de classificação como ruins, para fazer com que os grupos de alunos expressem seus pensamentos uns aos outros e negociem diferentes maneiras de ver. Alguns discentes aprendem com os outros, meios de discernimento que antes não vinham à mente, outros encontram seu modo de perceber sendo apoiado ou confirmado.

Assim, os pares de poderes matemáticos discutidos até aqui, são poderes que podem ser invocados quando os sujeitos estão tentando dar sentido à Matemática, e que ao estimular os estudantes a usar e, consequentemente desenvolver esses poderes, o pensamento geométrico será promovido.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

CONSTRUCTOS E ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS

De acordo com Mason e Johnston-Wilder (2004), constructos pedagógicos e estratégias pedagógicas informam e constituem a prática de professores e educadores. Ambos podem ser usados como distinções úteis para pensar sobre o ensino de Matemática em três momentos: no planejamento da aula ou de uma sequência delas; durante a aula, quando "vêm à mente" formas de ações possíveis; e na análise retrospectiva da aula, de modo a aprender com a prática (JOHNSTON-WILDER e MASON, 2005, p. 245).

Assim, construtos pedagógicos são teorias e conceitos que fundamentam a prática educativa. Eles são a base para a tomada de decisões sobre o que ensinar, como ensinar e como avaliar o aprendizado dos alunos. Esses construtos pedagógicos podem ser aplicados em diferentes contextos educacionais, como escolas, universidades, treinamentos corporativos, entre outros. A aplicação desses construtos pode ajudar a criar ambientes de aprendizado mais significativos e eficazes, que promovam o desenvolvimento integral dos alunos e o sucesso em suas vidas pessoais e profissionais.

Podemos considerar, partindo da ideia de constructos pedagógicos, que o estudo das concepções que realizamos sobre Modelagem Matemática, pensando no desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática em práticas de EO inteiramente online e síncrona, trouxe-nos à mente pontos comuns que identificamos nas concepções estudadas, permitindo que cunhássemos o nosso próprio entendimento de tarefa de Modelagem Matemática a ser desenvolvida em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA).

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) o contato com trabalhos de autores que introduziram ou desenvolveram um constructo pedagógico específico, além de ser informativo, fornece acesso às vozes originais, criando uma referência valiosa para professores e/ou pesquisadores. Desta forma, os autores entendem que o acesso a esses constructos pedagógicos tem potencial de embasar professores e/ou pesquisadores quando do desenvolvimento de uma prática, porque dependendo do contexto, acontecimentos podem servir como gatilhos a esses professores e/ou pesquisadores, trazendo à tona, como consciência imediata, estratégias pedagógicas que se configuram como uma resposta ao acontecimento.

Johnston-Wilder e Mason (2005) apresentam nove estratégias pedagógicas, inferidas por eles, de acordo com as interpretações que fizeram de alguns constructos pedagógicos, e que foram usadas e sugeridas ao longo do livro "Desenvolvendo o pensamento geométrico". São elas: diga o que vê, mesmo e diferente, outro e outro, de quantas maneiras, transforme um fazer em um desfazer, andaimes e enfraquecimento, exemplos construídos pelos alunos, desviar a atenção para automatizar, o ensino de técnicas.

As estratégias pedagógicas apresentadas por Johnston-Wilder e Mason (2005) são frutos de suas práticas ancoradas nos constructos pedagógicos que eles selecionaram. Dessa forma é possível ver como elas provocam os alunos no sentido de torná-los mais ativos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e, gradualmente fazendo-os protagonistas desse processo.

Percebemos nas estratégias pedagógicas apresentadas uma aproximação com ações do professor, no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Tais como querer saber as propostas dos alunos para abordar uma situação-problema, chamar a atenção do aluno para características da situação-problema até então não observadas, desafiar os alunos a apresentarem mais de uma solução, a testarem diferentes caminhos. Assim como investigarem diferentes situações-problema, para empregar nelas técnicas matemáticas, e não decorar técnicas matemáticas para serem repetidas em outros exemplos similares.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

ASPECTOS METODOLÓGICOS

O contexto em que se deu a produção dos dados para a pesquisa foi o curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, apresentado como projeto de extensão, submetido à Pró-Reitoria de Extensão (PROEXT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Campus Seropédica/RJ.

O curso teve carga horária de 20 horas e foi realizado com graduandos de Matemática no segundo semestre de 2018. Para o curso foram elaboradas cinco tarefas desenvolvidas em seis sessões. Cada tarefa era matematicamente independente uma da outra, com foco em tópicos de Geometria Plana e no desenvolvimento de características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática como estratégia para abordar e resolver situações-problema. Para este artigo optamos em apresentar o desenvolvimento de apenas uma tarefa.

Os encontros aconteceram no VMTcG e duravam em média duas horas, sendo uma sessão por semana. Nesse ambiente online os estudantes interagiam nos espaços quadro branco, GeoGebra, e chat, como apresentados na Figura 1.

Figura 1 - Elementos dos espaços de interação do VMTcG.

Fonte: VMTcG, 2018.

As ferramentas da aba quadro branco eram semelhantes às de editores de textos conhecidos, como o Word. Nela os estudantes interagiam simultaneamente escrevendo textos, construindo formas, escolhendo o tipo e tamanho da fonte, inserindo figuras, dentre outras interações. A versão do GeoGebra no VMT estava em língua inglesa e os estudantes não manipulavam suas ferramentas simultaneamente, o uso se restringia a um estudante por vez, e para usá-lo era preciso que o estudante clicasse a tecla “take control”. A coordenação de interações dos estudantes no quadro branco e GeoGebra se dava por meio de mensagens trocadas no chat.

Os estudantes do curso só ficavam sabendo das tarefas nos dias dos encontros no VMTcG. Como eles não tinham experiência anterior nesse tipo de curso e de cenário online a tarefa do “quadrado” foi pensada para ambientação (familiarização) dos estudantes com as ferramentas do VMTcG. As duas últimas sessões foram de culminância das atividades do curso, com a tarefa “propondo uma nova tarefa”. Dessa forma, para a tese nos ocupamos das três tarefas de Modelagem Matemática em que os licenciados precisaram trabalhar em grupos para solucionar as situações-problema das tarefas: “estação de bombeamento”, “polígono ABCDE”, e “caminhando com Carol”.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Entendemos esse estudo qualitativo como sendo uma pesquisa do tipo intervenção pedagógica (DAMIANI *et al.*, 2013), pois envolveu a participação do pesquisador/autor deste trabalho a partir da sua mediação nas sessões do VMTcG com os estudantes, promovendo interações constantes entre todos os sujeitos envolvidos e investigados (mediador, estudantes, conteúdos matemáticos). De acordo com Damiani *et al.* (2013), a intervenção pedagógica:

> [..] é definida como uma pesquisa que envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI *et al*., 2013, p. 1)

Partindo dessa definição, tarefas de Modelagem Matemática foram planejadas e implementadas ensejando interações dos sujeitos da pesquisa em um contexto pouco explorado no qual as tarefas foram desenvolvidas de forma síncrona e online visando o desenvolvimento cognitivo de todos sujeitos envolvidos, e requerendo do pesquisador/autor criatividade no diálogo traçado com concepções de Modelagem Matemática, conceitos de Educação Online, interações segundo temas, poderes e estratégias, úteis para implementação da intervenção e para avalição, compreensão, reflexão da intervenção implementada.

Para Alves-Mazzotti (1999), investigações qualitativas são multimetodológicas. Essa característica permite ao pesquisador seguir ou criar diferentes caminhos metodológicos para seus estudos, dependendo de seu contexto de pesquisa. Carmo e Ferreira (2008, p.117) consideram que “feita a observação, torna-se indispensável o seu rápido registro sob pena de perder informações valiosas”. Neste contexto, os dados dessa pesquisa foram produzidos pelos estudantes nas sessões de tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG – materializados nos chats das sessões e nas construções realizadas no quadro branco e no GeoGebra – e reconhecidos pelo pesquisador, por meio de observações e anotações no diário de pesquisa, possibilitando posterior análise tanto das observações, quanto dos registros guardados nas salas do VMTcG.

Para análise dos dados produzidos fiz uso das fases de observação crítica de chats de Menezes e Bairral (2020), a saber: a Fase 1 refere-se ao planejamento do chat; a Fase 2 refere-se à análise no coletivo; a Fase 3 refere-se à análise personalizada; e a Fase 4 refere-se à meta-análise do processo.

Com as Fases 1 e 2 foi possível descrever como se deu o planejamento e o desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG, destacando as ideias dos estudantes na abordagem das tarefas, as interações entre os estudantes e o mediador, e o número de intervenções dos estudantes e do mediador durante as sessões. A realização dessas fases vai ao encontro do que pontuam Bogdan e Biklen (1994) acerca da investigação qualitativa ser descritiva. Paralelo a essas fases e de maneira mais específica, na Fase 3 foi possível agrupar em blocos temáticos episódios pertinentes para na Fase 4 esses episódios serem analisados.

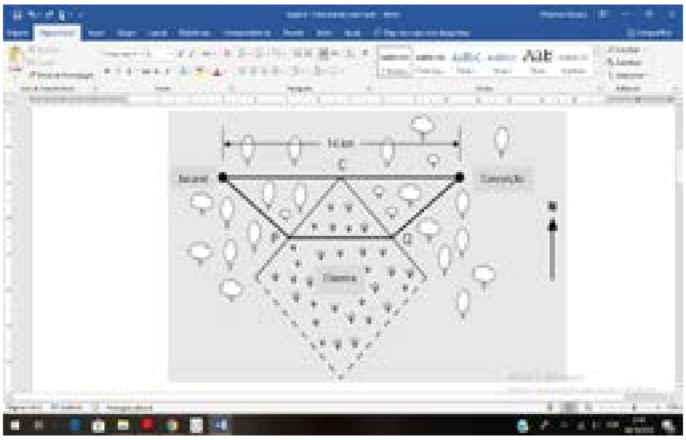
A TAREFA CAMINHANDO COM CAROL

A tarefa Caminhando com Carol foi adaptada de uma atividade encontrada no trabalho de Brito, Oliveira e Milani (2015). Não foram feitas grandes modificações no comando da situação-problema, pois ela já tinha características de investigação, que ensejavam nos estudantes discutir possibilidades de abordagem e de conteúdos matemáticos. As mudanças foram no contexto, nos nomes dos vilarejos (de Ardale e Brushwood para Jacareí e Conceição), no termo escrito em inglês (de square clearing para clareira), e no nome da personagem da situação-problema (de Kim para Carol), conforme apresentado no Quadro 1.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Quadro 1 - Tarefa Caminhando com Carol.

Tarefa: Carol está planejado fazer uma caminhada de Jacareí até Conceição. O itinerário em linha reta, cuja distância é de 14 km, a obrigará a atravessar uma região de relevo acidentado e cheia de arbustos. Entretanto, há um grande descampado quadrangular, cujo lado mede 7 km, localizado conforme ilustra a figura a seguir. O canto C desse descampado é o ponto médio do itinerário em linha reta de modo que a diagonal do descampado está contida na mediatriz desse itinerário. Carol segue uma rota parecida com a que mostrada da figura a seguir, atravessando o descampado de P até Q paralelamente ao itinerário em linha reta.



Encontrem e descrevam uma rota na qual Carol gaste o menor tempo possível. Considerem que a velocidade da caminhada na região acidentada e cheia de arbustos é de 1 km/h e que no descampado a velocidade é de 5 km/h.

Fonte: Curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, 2018

O desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol foi planejado para que os licenciandos trabalhassem com os conceitos de ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre pontos, e velocidade. O objetivo dos grupos era encontrar um caminho em que Carol fosse de Jacareí até Conceição no menor intervalo de tempo possível. A sessão aconteceu no dia 30/10/2018, por volta das 19:00 horas. Pedro entrou primeiro na sala (18:48:52h), seguido de Ana (18:49:49h), Paula (18:51:45h), do mediador (18:56:30h), e por último, do estudante Zeca (19:04:54h). As interações iniciais começaram com o mediador e o convencimento dos estudantes para expressarem os seus entendimentos acerca da situação-problema da tarefa. A seguir, apresentamos dois episódios selecionados para serem analisados:

Episódio 1: objetivos e necessidades acordados pelos estudantes para abordagem da tarefa

A sessão começou com os estudantes conhecendo a situação-problema da tarefa Caminhando com Carol, no quadro branco. O mediador quis saber as ideias dos estudantes, não dando margem para que o interesse deles se voltasse para ações individuais em seus locais de acesso. Pedro disse estar pensando (ainda estou no escuro), mas logo em seguida apresentou uma proposta de abordagem (encontrar as medidas dos lados da figura).

O mediador indagou o estudante sobre onde ele testaria sua abordagem, se no quadro branco, no papel, ou no GeoGebra. Foi a primeira vez que o mediador considerou abertamente no grupo um espaço de interação fora do VMTcG, e Pedro confirmou o uso desse espaço descrevendo que primeiro tentaria no papel e depois aplicaria no VMTcG. Mas o mediador contra-argumentou, questionando se o trabalho em grupo não ajudaria o estudante a perceber coisas que talvez sozinho não conseguisse. Nesse meio tempo Zeca já estava rabiscando algo no papel, e Paula dizia estar pensando e que tinha pensado parecido com Pedro, em primeiro achar as medidas dos lados da figura.

Ir para o GeoGebra foi algo perguntado pelo mediador ao grupo e não houve restrição quanto a essa ideia. No GeoGebra Pedro tentou construir a figura. Não conseguindo passou o comando para Paula. Nesse meio tempo Zeca estava informando no grupo o que estava pensando ao rabiscar no papel sobre as informações dadas no enunciado da situação-problema (acho que ela deve procurar andar ao máximo que puder no descampado, pois é mais rápido por lá, mas de forma que ela não acabe extrapolando). A interpretação de Zeca indicava que Carol deveria ficar mais tempo no descampado do que fora dessa área. O mediador perguntou aos outros estudantes o que acharam. Pedro respondeu estar pensado parecido e Paula achou entranho o enunciado pedir que se encontre um caminho, sendo que a figura já deixa isso explícito.

Zeca com seus rabiscos não conseguiu chegar a valores numéricos e reconheceu a necessidade do GeoGebra, para encontrar as medidas do percurso. O mediador quis garantir que os estudantes tinham entendido o enunciado da situação-problema, pois o foco não era encontrar as medidas do caminho, e sim a partir dessas medidas encontrar o caminho mais curto (ok, mas como podemos determinar o tempo mais curto?). Pedro, em resposta ao mediador, traçou um caminho para solucionar a questão (Se a gente encontrar as distâncias podemos usar a fórmula da velocidade pra encontrar o tempo). A estudante Ana, por causa de problemas na conexão não conseguiu colaborar, conseguindo questionar apenas se os segmentos de retas PQ e AB da figura eram paralelas.

Episódio 2: dois momentos da construção na aba GeoGebra com todas as possibilidades de percurso

Paula construiu a figura no GeoGebra e visualmente começou a considerar que o percurso que tocava os lados da área quadrangular formava, ao tocá-la, ângulos de 90 graus, o que a estudante entendeu como sendo o menor percurso (porque parece ângulos de 90 graus formado lá na figura). O mediador procurou entender o por quê de Paula achar isso, mas a estudante não tinha certeza, só estava compartilhando o que pensava. Em meio a isso Ana retirou os eixos das coordenadas x e y do próprio GeoGebra, para deixar o ambiente menos poluído.

A sessão ficou dividida entre dois objetivos: o objetivo do mediador de não focar tanto na construção da figura no GeoGebra, que já estava feita, e que a partir dela, na visão do mediador, os estudantes tinham como inferir respostas para a solução-problema; e o objetivo de Paula, que queria refazer a figura para que ela ficasse com medidas exatas.

O objetivo do mediador justificava-se no receio de essa fixação na construção da figura desgastasse a sessão, de forma semelhante como aconteceu na sessão anterior, e ao final o grupo não conseguir concluir a tarefa. A opção de Paula, de reconstruir a figura auxiliada por Zeca, e ambos pararem de interagir com o mediador, fez com que o mediador assumisse uma postura mais ríspida frente às interações dos estudantes.

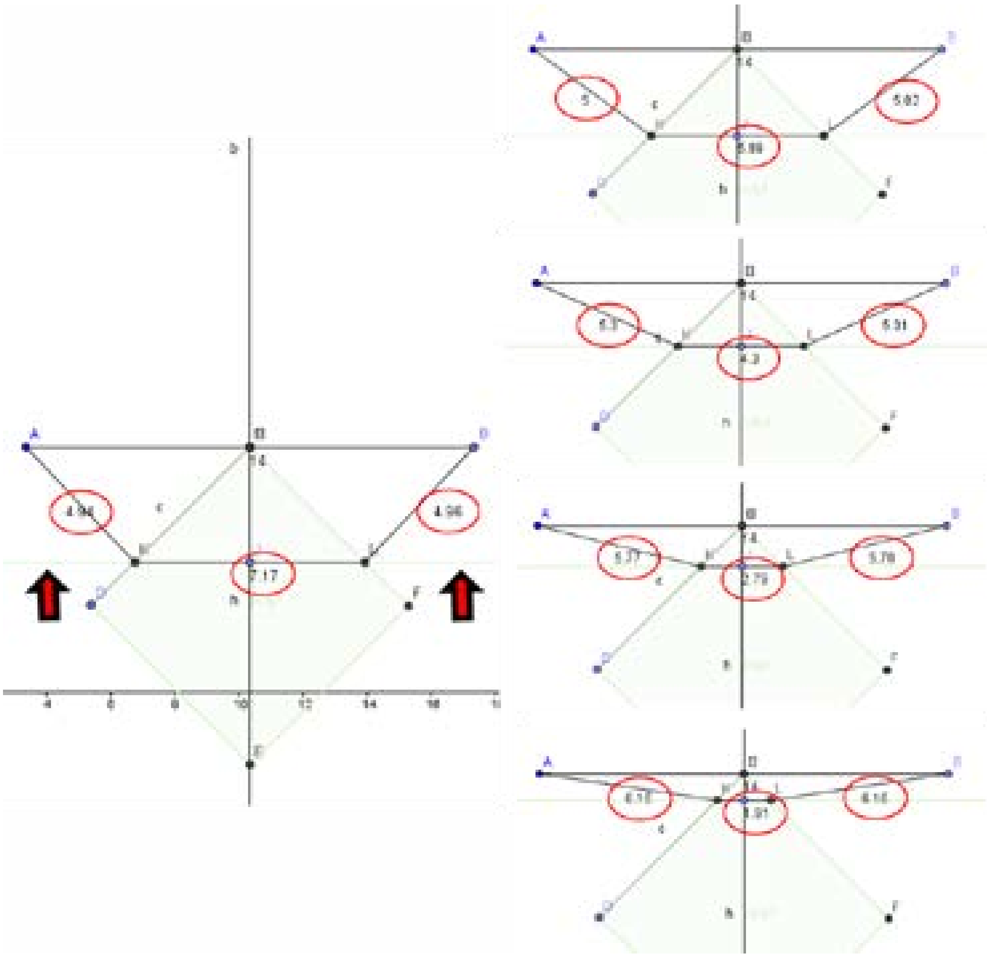
Em determinado momento, contudo, Paula passou a ignorar também as contribuições de Zeca, que direcionava pelo chat como Paula poderia reconstruir a figura, enquanto ela testava sua hipótese de traçar uma mediatriz no percurso horizontal, que ligava os dois vilarejos, e nessa mediatriz posicionar a área quadrangular da figura. Em um primeiro momento, visualmente considerando a escala que ela estava trabalhando, parecia que a mediatriz cortava a área quadrangular exatamente no meio, passando precisamente por uma das diagonais da figura. No entanto, quando ampliava a figura e a escala diminuía, a mediatriz não estava centralizada na diagonal da área quadrangular.

A explosão do mediador aconteceu quando Ana pediu ajuda, pois as falhas na conexão não estavam atualizando os espaços no VMTcG. Então ela via uma coisa sendo conversada no chat, e outra sendo feita no GeoGebra. Nesse momento, Zeca mencionou que também não estava entendendo nada, já que ele falava um caminho e Paula seguia outro. O mediador entendeu que as dificuldades dos estudantes eram no entendimento da situação-problema, só que no caso de Ana as dificuldades estavam nas atualizações do ambiente devido à conexão, e no caso de Zeca era pela visão de Paula de fazer do jeito dela.

Paula finalizou a construção, mas sua dificuldade em deixar a área quadrangular na posição certa fez o mediador novamente cogitar e alertar os estudantes no perigo de focar em um único percurso, ao replicar exatamente da figura da tarefa no GeoGebra, ao invés de considerar outras rotas. Pedro reforçou a necessidade de eles saberem as medidas para poder inferir resposta, sendo apoiado por Zeca.

A postura do mediador mudou quando Paula apresentou sua construção, na qual o segmento de reta, que ficava na área quadrangular, podia ser movimentado e, dessa forma, quando ela movimentava esse segmento as medidas do percurso variavam, mostrando todas as possibilidades viáveis de medidas, para determinar o tempo mais curto, considerando a área quadrangular. Nesse momento o mediador percebeu que a construção da estudante Paula remetia justamente ao que ele vinha falando sobre considerar outras rotas de percursos. O mediador pensou que Paula estava fazendo uma réplica estática da figura da tarefa, sendo surpreendido pelas características dinâmicas da construção, que atendia ao que ele queria que os estudantes fizessem desde o início.

Figura 2 - Movimentação das trajetórias na construção de Paula.



Fonte: VMTcG, 2018.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

O mediador perguntou se Ana não conseguia contribuir com a construção de Paula, e centralizar a diagonal da aérea quadrangular na mediatriz, mas Ana não respondeu, provavelmente por causa da conexão. Mesmo a construção de Paula apresentando erros de construção, o mediador perguntou aos estudantes se com ela era possível determinar o caminho mais curto. Pedro indiretamente corrigiu o mediador sobre o foco da situação-problema, que não se tratava de caminho mais curto, sugerindo aplicar a fórmula da velocidade para ver qual o caminho mais rápido, mesmo não tendo certeza disso (não sei se estou pensando no que deve ser feito na real).

Zeca propôs uma forma de encontrar o caminho mais curto, multiplicando o espaço percorrido fora do descampado por 1km/h, e o espaço dentro do descampado por 5 km/h. O mediador perguntou se Ana, Pedro e Paula concordavam. Ana não respondeu, Pedro apontou que para descobrir o tempo, o grupo teria que dividir o deslocamento pela velocidade média. Paula, considerando medidas aproximadas das dadas por sua construção, apontou que o caminho mais curto seria aquele no qual os segmentos do percurso formavam ângulos de 90 graus com a área quadrangular. Assim resultando em duas medidas de 5 km correspondente a parte do percurso fora da área quadrangular, e 6 km correspondente ao segmento interno a área quadrangular.

As tentativas de Paula de posicionar os segmentos do percurso formando ângulos de 90 graus com a área quadrangular mudou a medida do segmento interno à área quadrangular, que de 6 km se aproximou mais de 7 km. Como a estudante não conseguia fixar, formando exatamente esses ângulos, o mediador começou a questionar o grupo se o fato de não encontrar os ângulos se devia ao erro apresentado pela construção, ou eles não existiam. Zeca concordava com Paula, que era erro da figura. Pedro entendia que o apelo visual acabou fazendo-os perceberem que talvez ali se formava ângulos de 90 graus e confirmando a hipótese de Paula de que, quando os segmentos formavam esses ângulos, ou se aproximavam, o caminho para Carol chegar até a área quadrangular e andar mais rápido era menor.

Com as respostas dos estudantes o mediador mudou a tática, resolveu considerar também que os segmentos formavam com a área quadrangular 90 graus. Partindo dessa assertiva acordada pelo grupo, o mediador inqueriu como calcular o menor percurso. Pedro, influenciado pelos ângulos retos, sugeriu usar o Teorema de Pitágoras, percebendo logo após propor, que esse caminho não resultaria em nada, já que as medidas foram identificadas usando ferramentas do GeoGebra.

Zeca sugeriu usar Regra de três e Paula concordou. O mediador perguntou se daria certo por esse caminho, e Zeca foi explicando os cálculos que ele tinha feito no papel, chegando ao tempo de 677,4 minutos, considerando as medidas reais da figura. O que em horas é equivalente a 11 horas e 29 minutos. O mediador perguntou se os outros estudantes concordavam com a resposta encontrada por Zeca e eles confirmaram. Pedro teve mais dificuldade de acompanhar, pois assim como Ana, começou a ter problemas de conexão, mas também concordou com a resposta encontrada por Zeca.

O mediador, encaminhando para o encerramento da sessão e mais uma vez confundindo em trocar caminho curto com tempo mais rápido, perguntou como eles tinham certeza de que aquela era a resposta certa. Zeca ensaiou uma resposta, mas Paula argumentou que quanto mais tempo Carol ficasse no descampado, mais tempo ela gastaria, sendo o percurso escolhido por eles o que Carol fica menos tempo fora do descampado.

Para concluir, o mediador quis saber sobre o que eles tinham achado da tarefa. Os únicos presentes e que responderam foram Paula e Pedro. Pedro achou interessante, mesmo exigindo muita reflexão, enquanto que Paula também achou a tarefa interessante e mais fácil do que a tarefa da sessão anterior. Infelizmente a conexão de Ana, Pedro e Zeca no VMTcG comprometeu muito suas participações na sessão, de Ana durante toda ela, e de Pedro e Zeca nos momentos finais.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

CONCLUSÃO

Retomando nossa questão de investigação: Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento síncrono da tarefa Caminhando com Carol no ambiente online VMTcG?

O mediador assumiu uma postura para evitar silêncios diante das dúvidas dos estudantes. Dessa forma, foi sondando-os sobre formas de abordagem, equilibrando para não focar mais em uma proposta do que em outra, e pela primeira vez reconhecendo o uso por parte dos estudantes de espaços de interações externos ao VMTcG.

A estratégia diga o que vê foi usada pelo mediador para descobrir o que os estudantes estavam pensando, e analisar como eles estavam se sentindo em relação à tarefa Caminhando com Carol. Assim, o mediador perguntou o que eles acharam da tarefa, como seria possível resolver, pediu que o estudante Pedro falasse sobre o que ele pensou e sobre o que o estava deixando no "escuro". Pedro, como aconteceu nas duas sessões anteriores, foi o primeiro a propor. Ao contrário do que fez antes, o mediador não esperou os estudantes decidirem ir para o GeoGebra, questionou em que espaço Pedro testaria sua conjectura, e ainda normalizou o uso do papel, protagonista em outra tarefa realizada.

Sem deixar a discussão centrada em Pedro, o mediador chamou a atenção dos outros estudantes conectados no VMTcG, Zeca e Paula sobre a proposta de Pedro e sobre a possibilidade de construção no GeoGebra. O mediador mostrou-se aberto para o uso de outros espaços, porém deixou claro seu posicionamento sobre a construção ser feita no GeoGebra, no sentido de que permitiria que o grupo avaliasse o que estava sendo feito, podendo observar algo que Pedro, por exemplo, não conseguiria sozinho rabiscando no papel. O mediador quis trazer o GeoGebra para ser o espaço principal de testar ideias, tirando-o do espaço secundário que os estudantes o colocaram de aplicar ideias testadas no papel.

Pedro convenceu-se e foi construir no GeoGebra, Zeca foi para o papel. Ambos tiveram essa liberdade de testar suas propostas. Nesse sentido observamos que o mediador fez uso da estratégia de quantas maneiras?, pois colocou seu ponto de vista, mas não invalidou outros caminhos externos ao GeoGebra, que poderiam ser percorridos na abordagem da situação-problema da tarefa.

Nesta postura ficou evidenciada nas interações em que o mediador: chamou a atenção para espaços de interação do VMTcG e fora dele, argumentou, convenceu parte dos estudantes sobre seu ponto de vista em favor do trabalho em grupo, incluiu outros estudantes, instigando opiniões sobre a proposta de Pedro, direcionou, quis saber ao certo o que estava acontecendo fora do VMTcG. O uso dessa estratégia perdurou nas interações do GeoGebra em questionamentos do mediador que emergiram das dificuldades de Pedro na construção da figura no GeoGebra, e das hipóteses de resolução apresentadas por Zeca, como observados nas interações do episódio 1: querer saber das dificuldades de construção no GeoGebra, chamar a atenção para mais de uma resposta, perguntar, incentivar.

Em determinado momento da sessão os estudantes Paula e Zeca resolveram seguir o que estavam fazendo, ignorando os direcionamentos do mediador. O mediador então esperou para ver aonde os estudantes chegariam. Mesmo de forma indireta e apostando mais na sua proposta, observamos aproximações das interações do mediador com a estratégia andaimes e enfraquecimento, considerando que os estudantes seguiram o que pensaram por conta própria, à revelia do que foi proposto pelo mediador. Interações do mediador que favoreceram essa autonomia dos estudantes estiveram presentes quando ele buscou entender o porquê de considerar determinadas características na construção e não os privou de testar suas conjecturas, mesmo não sendo o que ele tinha em mente. Mas nem todas as interações do mediador foram nessa intenção, o medo de um impasse e de acontecer com a tarefa Caminhando com Carol o mesmo que aconteceu com a tarefa Polígono ABCDE, fez o mediador reagir a essa autonomia dos estudantes em alguns momentos, de forma não tão amistosa, assumindo uma postura um pouco ríspida.

O mediador ao favorecer essa autonomia, mesmo não sendo o que melhor o satisfizesse, permitiu que os alunos construíssem uma figura própria, não sendo apenas uma réplica da figura que foi apresentada no quadro branco, mas uma construção dinâmica, permitindo e satisfazendo o que a princípio queria/propunha o mediador, do olhar sobre como multiplicar possibilidades de soluções. Ao perceber isso o mediador parabenizou, incentivou, apoiou, pediu contribuições de outros estudantes para aperfeiçoar a construção realizada.

Enfim, a estratégia exemplos construídos pelos alunos foi usada na medida em que as interações do mediador, nessa sessão e em sessões anteriores, possibilitaram aos estudantes fazerem sentido global acerca de aspectos da tarefa. Assim não os restringindo a reproduzir e considerar apenas o que estava traçado na figura estática, apresentada no quadro branco.

A contrariedade do mediador referente à construção de Paula esteve mais relacionada à estratégia de desviar a atenção para automatizar, assim em seu entendimento a construção não era mais importante do que começar a pensar em como determinar o caminho mais rápido a ser percorrido por Carol, por isso interações do mediador no sentido de: mostrar outros caminhos, mesmo o grupo não seguindo. No entanto, o mediador não tinha entendido a construção da estudante, pois pensavam em algo estático, enquanto que ela o surpreendeu com uma construção que fazia o que queria, que era mostrar todas as possibilidades de percurso possíveis, permitindo inferir qual percurso mais rápido a ser percorrido por Carol.

A proposta da tarefa Caminhando com Carol é uma tarefa que não prima por exercitar uma técnica em específico, ou seja, o mediador no planejamento pensou em quais conteúdos poderiam ser trabalhados com a tarefa, mas em momento algum da condução da sessão alguma técnica foi privilegiada em relação à outra. Dessa forma temos a estratégia referente ao ensino de técnicas, já que os estudantes foram conduzidos pelas interações do mediador de duvidar e provocar reflexões, apoiar entendimentos e hipóteses do grupo, requerer respostas e validação do grupo; ajudando-os dessa forma por meio dessas discussões e reflexões na construção de métodos viáveis e eficientes, para abordar e solucionar a situação-problema. Nesse prisma, primeiro os estudantes reconheceram o contexto da tarefa, para depois aplicarem técnicas de construção no GeoGebra e técnicas de conteúdos matemáticos.

A nova tônica adotada pelo mediador na condução da investigação da tarefa Caminhando com Carol refletiu nas interações dos estudantes, retomando o uso em grupo de espaços no VMTcG, e possibilitando o uso ou o aumento da frequência de utilização dos poderes matemáticos dos estudantes.

Pedro e Zeca foram os primeiros a expressar suas ideias para a abordagem da tarefa. Respondendo às investidas do mediador, Pedro propôs encontrar as medidas dos lados da figura, primeiro queria fazer no papel sem aplicar no GeoGebra, convencido pelo mediador optou por usar primeiro o GeoGebra. Paula, depois também disse estar pensando em algo parecido com o que apresentou Pedro. Zeca, por outro lado, foi “falando em voz alta” no chat informações do enunciado da situação-problema e decidiu testar suas ideias no papel, em seu local de acesso.

Nesse contexto inicial temos os poderes imaginar e expressar o que é imaginado nas interações: pensando, elaborando possibilidades, mesclar espaços de interação, pensar individual no papel, pensar em grupo no VMTcG, rabiscar, pensar e ter ideias parecidas com as de outro, repassar informações do enunciado da situação-problema.

Pedro trouxe como propôs encontrar as medidas dos lados da figura que descrevia, possíveis percursos para Carol, e Zeca, após seus rabiscos inferiu a hipótese de que Carol precisa chegar o mais rápido até o descampado quadrangular. Mas ambos concordaram em identificar as medidas e usando o GeoGebra, e quem assumiu a função de construir a figura foi a estudante Paula, que ajudou Pedro que estava com dificuldades.

Paula construiu, apoiada por Zeca uma estrutura que sintetizava todas as possibilidades de percurso do enunciado, em que era possível verificar a variação das medidas dos lados conforme se movimentava um dos percursos dentro da área quadrangular, convencendo todos com isso, inclusive o mediador, da importância daquela construção para análise de possibilidades de resolução da tarefa.

Assim, Paula ao conjecturar possibilidades e efetivar o que estava pensado, convenceu a si e aos outros da necessidade da construção dos percursos para a investigação da situação-problema. Os momentos antes da decisão coletiva de construir a figura no GeoGebra até a estudante Paula terminar sua construção e convencer a todos, demandaram discussões na investigação, promovendo reflexões, posicionamentos, que refletiram no uso dos poderes de conjecturar e convencer a si e aos outros, em vários momentos e vindo de diferentes estudantes. Como na ideia de abordagem de Pedro, na hipótese oriunda dos rabiscos de Zeca e na construção dos percursos no GeoGebra de Paula. Onde puderam ser capturadas nas interações: dificuldade de construção no GeoGebra, traçar hipóteses de resolução, construir no GeoGebra, expressar o que pensou em diferentes momentos, reconhecer a ineficiência do papel e a necessidade do GeoGebra, perguntar sobre informações do enunciado, elaborar e propor um plano de abordagem, construir no GeoGebra, visualmente inferir medidas para ângulos, auxiliar na construção de outro estudante, focar na ideia planejada, ignorar, contribuir, conjecturar, apoiar, parabenizar.

Entendemos a construção de Paula no GeoGebra como a generalização da situação-problema proposta pela tarefa. Sendo essa generalização usada como pano de fundo para inferir respostas para determinar o caminho mais curto de Carol. O grupo ter conseguido chegar nesse nível de sofisticação mostra o uso dos poderes particularizar/especializar, nos quais as informações do enunciado, juntamente com a figura estática que o acompanhava foram absorvidos e entendidos. Isto, para que pudesse resultar em uma generalização, que conseguiu capturar a essência da estrutura, constituindo as possibilidades de percursos de Carol sair de um vilarejo para outro em menor tempo.

Neste cenário a estudante Paula conseguiu visualizar o que poderia variar da figura e, partindo dessa interpretação, conseguiu chegar em estrutura dinâmica, que mesmo com erros de construção, não abalou sua importância nos rumos da investigação.

A construção efetivada pela estudante Paula permitiu ao grupo identificar as medidas dos lados do percurso, que era a proposta de Pedro, e avaliar a hipótese de Zeca de que quanto mais rápido Carol chegasse ao descampado quadrangular, mais rápido seria o percurso. A construção virou pano de fundo para as discussões e para encontrar soluções, e mais uma vez os estudantes Paula, com a hipótese do encontro do percurso com o descampado quadrangular formar ângulos de retos, e Zeca, com a proposta de usar regra de três para calcular e encontrar o percurso com menor tempo a ser percorrido por Carol, puderam utilizar os poderes a seguir relacionados. Conjecturar e convencer a si e aos outros, como percebemos nas interações: duvidar sobre o que está pensando, propor, conjecturar solução a partir da construção, imaginar e expressar possíveis soluções, insistir nas conjecturas, testar no papel e comunicar no chat, concordar e apoiar a resolução do outro, validar a resposta encontrada.

Outros poderes que surgiram em diferentes momentos e foram usados pelos estudantes de organização e classificação. Em vários momentos, para o avanço ou abandono de uma ideia os estudantes enfatizaram características da construção. Por exemplo, Paula visual e posteriormente manipulando a construção da figura no GeoGebra, inferiu que os ângulos formados pelo encontro e saída da área quadrangular formavam ângulos retos, como seccionava os lados daquela região. Por outro lado, Daniel analisando e enfatizando esses ângulos retos considerou usar o Teorema de Pitágoras, abandonando essa ideia logo em seguida, porque as ferramentas do GeoGebra identificavam os lados dos triângulos retângulos formados pelos percursos da figura. Assim, a cada ato de ordenação dos estudantes, eles precisaram enfatizar características relevantes (ângulos retos) e ignorar outras (outras formações em que não se encontrava ângulos retos). O que exigiu deles a capacidade de discriminar qualidades (propriedades, teoremas, generalidades), usadas para classificar.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

Os conteúdos matemáticos pensados pelo mediador para serem discutidos com a tarefa Caminhando com Carol foram ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre ponto, velocidade. As estratégias pedagógicas de condução da sessão do mediador e o uso de poderes matemáticos dos estudantes repercutiu no aparecimento de temas matemáticos relacionados à tarefa e aos conteúdos matemáticos mencionados.

O objeto matemático apresentado na tarefa Caminhando com Carol foi a estrutura que mostrava dois percursos, estando limitada inicialmente a esses dois percursos. Transpor essa forma geométrica para o GeoGebra acrescentou uma liberdade de observar possibilidades de percursos, que permitiram aos estudantes observar ângulos, medidas, que antes não era possível, com a figura estática postada no quadro branco. Nesses casos temos os temas matemáticos liberdade e limitação reconhecidos nas interações: construção da figura no GeoGebra, determinar as medidas do percurso, inferir medidas de ângulos da figura visualmente, mediatriz, posição do quadrado errada na construção do GeoGebra.

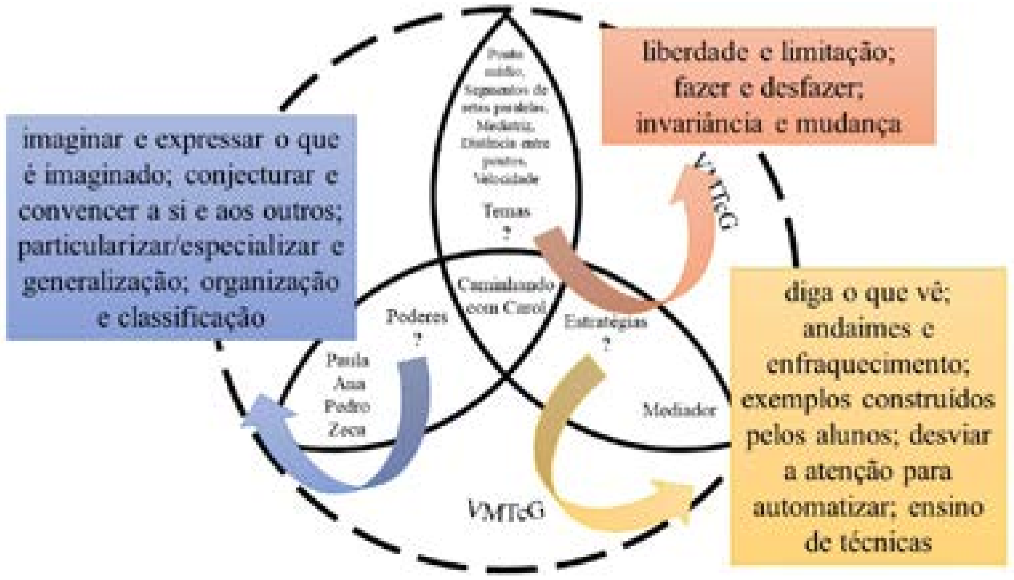
Outros temas matemáticos que percebemos na construção da figura no GeoGebra referem-se ao fazer e desfazer da figura original, solicitando da estudante criatividade de aproveitar elementos e conceitos matemáticos, que ajudaram a tornar a construção dinâmica e possibilitar observar diferentes percursos. Assim, trazer conceitos como traçar uma mediatriz no segmento de reta, que liga o vilarejo a Jacareí até Conceição, sem passar pelo descampado quadrangular, e ainda deixando o segmento paralelo, que passa pelo descampado quadrangular podendo ser movimentado, necessitou de Paula mais discernimento e engenhosidade, permitiu que o grupo percebesse nesse caso particular uma estrutura comum subjacente (generalização).

Outros temas matemáticos acessados pela movimentação do segmento paralelo, que passa pelo descampado quadrangular são invariância e mudança. Em que foi possível observar as medidas dos percursos, variando e fortalecendo a hipótese de que os pontos dos segmentos que tocavam a área quadrangular e que formavam ângulos de 90 graus produziam medidas de segmentos mais curtos de entrada e saída do descampado quadrangular.

Este dinamismo e essas observações permitiram ao grupo traçar abordagens que encaminharam para a conclusão da tarefa. Assim percebidas nas interações: fórmula da velocidade, possibilidades de abordagem, determinar o tempo a partir da razão do deslocamento e da velocidade média, ângulo reto, relações métricas de um triângulo retângulo, regra de três, problema interessante, muitas reflexões, mais fácil que o da sessão anterior.

No desenvolvimento da tarefa Caminhando com Carol, os estudantes orientados pelo mediador investigaram o percurso mais curto a ser percorrido por Carol, de Jacareí até Conceição. Nesse contexto emergiram interações do mediador como estratégias pedagógicas, interações dos estudantes como poderes matemáticos, e expressões nas interações do mediador e dos estudantes emergiram interações da tarefa e dos conteúdos matemáticos, como temas matemáticos, conforme apresentado na Figura 3.

Figura 3 - Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Caminhando com Carol no VMTcG.



Fonte: Menezes, 2021.

A tarefa de Modelagem Matemática Caminhando com Carol iniciou com uma situação-problema, que permitia investigar e comparar dois percursos, para descobrir qual deles Carol podia realizar em menor tempo. A construção dos percursos de forma dinâmica no GeoGebra permitiu encontrar um modelo matemático, proporcionando ao grupo avaliar qual o percurso mais rápido. Nesse contexto pontuamos aspectos da tarefa e da condução do mediador como:

- não foram indicados os conteúdos matemáticos a serem utilizados na investigação;
- não foi indicado como os estudantes deveriam conduzir a investigação da situação-problema;
- houve mais de uma possibilidade de resolução, sendo todas analisadas, negociadas, aceitas ou descartadas pelo grupo;
- com a construção da figura no GeoGebra e a possibilidade de movimentação dos segmentos, foi possível avaliar muitas possibilidades de percurso, sendo escolhido uma única solução;
- a forma de condução da investigação pelo mediador oscilou entre um controle maior nas interações comunicativas na investigação e uma maior liberdade, para que os estudantes pudessem avaliar e tomar decisões próprias, dessa forma a condução do mediador em certos momentos limitou e em outros possibilitou a comunicação entre ele e os estudantes.

Os aspectos identificados na tarefa e na condução do mediador caracterizam uma tarefa de Modelagem Matemática semifechada, em que os estudantes investigaram uma situação-problema fictícia e conseguiram construir uma estrutura, o modelo matemático, que permitiu ao grupo avaliar qual a solução apropriada para responder a problemática da tarefa Caminhando com Carol.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências sociais. In: ALVESMAZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Thomson, 2 ed, 1999.

BADGER M. S., SANGWIN C. J., HAWKES T. O., BURN R. P., MASON J., POPE S. **Teaching Problem-solving in Undergraduate Mathematics**. Coventry, England: Coventry University, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos**. Campinas, SP: UFABC, 2012.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRITO, dos D. S.; OLIVEIRA, C. F.; MILANI, C. S. A 'Escolarização' do Espaço Vivido nas Atividades de Modelagem com Geometria: Uma Compreensão Sob a Perspectiva Fenomenológica. In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-SIPEM, 2015, Pirenópolis/GO, **Anais...** Pirenópolis/GO, 2015.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina/PR, **Anais...** Londrina/PR, 2004.

CARMO, H. & FERREIRA, M. **Metodologia da investigação**: guia para autoaprendizagem. Lisboa: Universidade Aberta, 2008.

DAMIANI, M. F.; ROCHEFORT, R. S.; CASTRO, R. F. DE; DARIZ, M. R.; PINHEIRO, S. S. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, n. 45, p. 57-67, 2013.

FOSTER C., GALLIGAN L., MACKRELL K., MASON J., MELVILLE A., PIGGOTT J., RODD M., WATSON A. Freedom and Constraint. **Mathematics Teaching**, 191, June, 2005. p. 37-40.

JOHNSTON-WILDER, S.; MASON, J. **Developing Thinking In Geometry**. USA: SAGE, 2005.

MASON, J. A Phenomenal Approach to Mathematics. Paper presented at Working Group 16**, ICME**, Copenhagen, 2004.

MASON, J., & JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. Milton Keynes, England: Open University Press, 2004.

MASON, J. Hyper-learning from hyper-teaching: what might the future hold for learning mathematics from & with electronic screens? **Interactive Educational Multimedia** 14, 2007. p19-39. (refereed e-journal) 14 (April)

MASON, J. Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.) **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum. New York, 2008. p57-94.

MASON, J. Combining Geometrical Transformations: a meta-mathematical narrative. In: ZAZKIS R.; HERBST P (Eds). **Scripting approaches in mathematics education**: Mathematical dialogues in research and practice. Switzerland: Springer International, 2018. p. 21-52.

Revista Educação Matemática, Campina Grande-PB, Brasil, V. 11, N. 1, 2023, PUBLICAÇÃO CONTÍNUA

MENEZES, R. O. Mapeamento em Dissertações e Teses de Atividades de Modelagem Matemática Desenvolvidas na Modalidade a Distância. In: 39 Reunião Nacional ANPEd, 2019, Niterói-RJ. **Anais da 39 Reunião Nacional ANPEd**, 2019.

MENEZES, R. O.; BAIRRAL, M. A. Interações em um ambiente de aprendizagem *online* e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra?. **Revista Paradigma**, v. 41 (Nº Extra 2), 2020. p. 277-304.

MENEZES, R. O. **Modelagem Matemática Online**: temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2021, 185 f.

MENEZES, R. O.; BAIRRAL, M. A. Um mapeamento de pesquisas sobre atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma online. **Revemop**, v. 3, p. e202119, 26 jul. 2021.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

SOUZA, R. M. de; BAIRRAL, M. A. Acessar ou Interagir? Uma Análise em Disciplinas da Licenciatura em Matemática no Cederj. **EAD em Foco**, v. 6, p. 39-49, 2016.