ISSN 1981-6979
VOLUME 12, NÚMERO 2. 2024
EDIÇÃO CONTÍNUA - PROPOSTAS DIDÁTICAS E DESAFIOS DE IMPLEMENTAÇÃO
DOI: 10.29327/252910.12.2-2

ENSINO DE CÁLCULO: UM ESTUDO DAS POSSIBILIDADES DE INTRODUÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Sérgio Cândido da Silva [1]

RESUMO

A dificuldade apresentada pelos alunos na disciplina de Cálculo nas universidades de todo país é um problema recorrente em cursos de diversas áreas que possuem esta disciplina em seu currículo. O índice de não aprovação é altíssimo, o que acaba acarretando, em muitos casos, até no abandono do curso. Este trabalho apresenta como alternativa para tentar solucionar este problema a inserção, de forma introdutória, dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral ainda no Ensino Médio. Por meio de uma pesquisa bibliográfica realizada em trabalhos disponíveis sobre o tema, concluímos que além de ser possível introduzir esta matéria no Ensino Médio, pode-se ter uma melhora significativa no desempenho dos alunos que cursam esta disciplina.

Palavras-chaves: Ensino de Cálculo. Ensino Médio. Cálculo Diferencial e integral.

ABSTRACT

The difficulty presented by students in the discipline of Calculus in universities across the country is a recurring problem in courses in different areas that have this discipline in their curriculum. The non-approval rate is very high, which in many cases leads to the abandonment of the course. This work presents as an alternative to try to solve this problem the insertion, in an introductory way, of the concepts of Differential and Integral Calculus still in High School. Through bibliographical research carried out in works available on the subject, we concluded that in addition to being possible to introduce this subject in High School, one can have a significant improvement in the performance of students who attend this discipline.

Key words: Teaching Calculus. High school. Differential and integral calculus.

INTRODUÇÃO

Sabemos que no Ensino Superior, não apenas, mas principalmente nos cursos que abrangem a área de Ciências Exatas, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é tida como uma das mais importantes da grade curricular de inúmeros cursos. Grande parte desse lugar de destaque se justifica pela grande aplicabilidade que este conteúdo proporciona na resolução de problemas em diversas áreas de estudo. Entretanto, a pouca familiaridade da grande parte dos estudantes com esse conteúdo causa uma dificuldade elevada com a disciplina, ocasionando déficit de aprendizado e chegando até, em muitos casos, a reprovação.

Assim, justificamos a relevância da nossa pesquisa considerando como aspecto principal a importância do primeiro contato com estes conteúdos ainda no Ensino Médio com o intuito de possibilitar a familiarização do estudante com essa área de estudos. Além disso, deve-se levar em consideração o enriquecimento do ponto de vista matemático e a maturidade que o estudo desse tema pode propiciar ao aluno.

O objetivo do trabalho é mostrar que é possível iniciar o estudo dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral ainda no Ensino Médio. E que mesmo que esse estudo seja feito de forma introdutória, pode refletir de forma positiva na vida acadêmica dos estudantes. Com o propósito de alcançar os objetivos propostos, o

1 Pós-Graduado em Ciências Exatas pela Faculdade Focus. Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: sergio.candido187522@gmail.com

trabalho está dividido da seguinte maneira:

Na primeira parte, aborda-se um pouco da história do Ensino de Cálculo no Brasil, apresentando de forma cronológica, as principais mudanças que ocorreram ao longo do tempo com relação a esta área do ensino. Em seguida, apontamos alguns dados que reafirmam a dificuldade encontrada pelos alunos ao chegarem ao Ensino Superior e se depararem com uma matéria totalmente nova, a qual nunca tiveram nenhum tipo de contato anterior.

Posteriormente, falamos sobre as possibilidades de se inserir os conteúdos de Cálculo (chamaremos apenas assim daqui por diante) no Ensino Médio. E em seguida, versamos sobre os conteúdos que consideramos mais adequados de se abordar no Ensino Médio, levando em consideração o nível de maturidade dos alunos nesta fase de ensino.

E por fim, trazemos as principais definições das ideias do Cálculo, assim como os principais conceitos e regras de derivação e integração, seguidos de alguns exemplos.

O ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Atualmente, é do conhecimento de todos que permeiam a comunidade acadêmica que a disciplina de Cálculo é uma das mais importantes da grade curricular de inúmeros cursos. Por esse motivo, a preocupação com baixo rendimento de grande parte dos alunos que cursam esta disciplina aumenta ainda mais. Sendo um dos principais responsáveis pelos altos índices de não aprovação e culpado pela desistência de vários alunos destes cursos. A seguir, tentaremos identificar o motivo dessa dificuldade encontrada por esses estudantes e propor uma possibilidade de intervenção para o problema.

O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL AO LONGO DO TEMPO

Com o passar dos anos e as mudanças sofridas pela educação brasileira, o ensino da Matemática também sofreu muitas alterações. Rocha (2018), explica que os primórdios desse ensino no Brasil foram os jesuítas que, em 1573, fundaram um colégio no Rio de Janeiro, que tinha como objetivo principal formar novos servos. Nessa época, era dada pouca importância para a Matemática, que era estudada apenas nos cursos superiores de Filosofia, Ciências e Artes. Com a expulsão dos jesuítas em 1759, o ensino começou a sofrer mudanças, como o surgimento de aulas isoladas e a inclusão de novas disciplinas.

A autora explica ainda que posteriormente, em 1837, foi fundada a primeira escola secundária pública no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II. Nesse período, a Matemática sofreu acréscimo de disciplinas como Aritmética, Geometría e Álgebra nos currículos de todas as séries que constituíam o ensino naquela época. Em 1890, aconteceu a primeira mudança importante no ensino do Brasil, quando foi decretado a inclusão do ensino da Matemática abstrata e concreta e a exclusão de disciplinas tradicionais como o latim e o grego. Foi a partir daí, que o Cálculo começou a fazer parte dos conteúdos lecionados nas escolas.

Em 1931, o ensino foi dividido em dois ciclos: o fundamental e o complementar. O ensino de Cálculo aparecia no ensino complementar que servia como preparação para o Ensino Superior. Mais uma Reforma, que aconteceu entre 1935 e 1945, alterou mais uma vez a estrutura do ensino secundário, dividindo o curso complementar em dois outros cursos: Clássico e Científico. Até aí não se tinha nenhuma menção da aparição do Cálculo Integral nesses cursos, apenas do Cálculo variacional e derivacional.

Segundo Rocha (2018) somente em 1951, o conteúdo de integrais e primitivas retornaram oficialmente aos programas de ensino. Em 1960, iniciou-se o movimento da Matemática Moderna no Brasil. Esse movimento tinha como objetivo deixar o ensino das escolas mais próximo da pesquisa. Para tornar isso possível, se fez necessário maior rigor e formalismo dos conteúdos, isso implicou na implementação de algumas disciplinas em detrimento a outras. Foi aí, que o Cálculo começou a ser banido das escolas de ensino básico.

Para Ávila (1991, p.2), “Não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e formalismo exigiam o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos que tomam tempo”. Excluir a disciplina de Cálculo pode-se dizer que foi uma medida contrária a um movimento que tinha como objetivo a modernização do ensino da Matemática. Pois como afirma Rocha (2018), “o Cálculo sempre foi o que há de mais moderno. E devido à sua aplicabilidade em diversas áreas vem, desde sua descoberta, contribuindo para o desenvolvimento tecnológico e científico”.

DIFICULDADES ENCONTRADAS NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

Já mencionamos no início deste trabalho sobre as dificuldades da aprendizagem de Cálculo por parte dos alunos no Ensino Superior. Muito se tem estudado sobre esse tema ao longo do tempo, a fim de se buscar soluções para esse problema. Uma pesquisa realizada por Rezende (2003), na Universidade Federal Fluminense - UFF, aponta que o nível de reprovação na disciplina variou de 45% a 95% durante os anos de 1996 a 2000. Outra pesquisa realizada por Rafael (2017) em uma faculdade particular do Rio de Janeiro nos cursos de Engenharia mostrou que os índices de reprovação no período de 2013 a 2015 variaram de 35% a 50%. Sobre isso, Baruffi (1999 apud REZENDE, 2003, p.1) argumenta que:

> [...] O índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%”’, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%. (BARUFI, 1999 apud REZENDE, 2003, p.1).

Vale a pena ressaltar que essas situações não são acontecimentos isolados, presentes em alguma universidade específica. Molon (2013), cita alguns dados da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, enviados pelo seu departamento de matemática acerca do rendimento acadêmico entre os anos de 2009 e 2012. Foram analisadas as disciplinas que possuem o Cálculo na sua grade curricular, sendo um total de 3457 estudantes dos quais 1447 obtiveram aprovação nas disciplinas e os 2010 restantes não conseguiram obter êxito na matéria estudada. Esse número de reprovações levou em conta tanto o fracasso no na obtenção de notas como reprovações por infrequência ou trancamento do curso, o que não diminui a seriedade desses dados, haja vista que o índice de reprovação nesse espaço de tempo analisado passou dos 58%.

Levando em consideração os dados apresentados torna-se notória a necessidade de se procurar alternativas para sanar esse problema. Para isso, precisamos identificar a causa de tanta dificuldade por parte dos alunos. Um ponto que pode contribuir para esse problema é o fato de a maioria dos cursos que possuem esta disciplina em sua grade curricular ofertá-la ainda no primeiro período do curso, quando os alunos ainda possuem pouca maturidade e uma bagagem de conteúdos ainda limitada, principalmente quando se fala de alunos que tiveram sua formação básica em escolas públicas.

A autora Rafael (2017, apud Machado, 2008) comenta sobre alguns motivos que podem influenciar no baixo rendimento dos alunos na disciplina de Cálculo.

> [...] as causas de natureza cognitiva, isto é, os alunos não apresentam estruturas cognitivas capazes de compreender as complexidades do Cálculo; as causas de natureza didática, segundo esta concepção as dificuldades estariam, em encontrar a metodologia mais adequada ao ensino e, por último, as dificuldades de natureza epistemológica, que se baseiam na ideia que as deficiências referentes ao ensino de Cálculo são anteriores ao espaço-tempo local do ensino de Cálculo. (Rafael, 2017, apud Machado, 2008)

Reis (2001), atribui o motivo de tanta dificuldade ao déficit na formação do ensino básico. Ele alega que os alunos se inserem no Ensino Superior, além de totalmente dependentes, sem o domínio dos conceitos mais básicos e sem o hábito de estudar, o que os deixam sem segurança.

Para tentar solucionar esses problemas alguns autores trazem algumas alternativas de ações que podem ser empregadas nas instituições de ensino. Rezende (2003) infere que uma ação bastante usada pelas instituições de ensino é a inserção de cursos "preparatórios" que teriam em sua ementa os principais conteúdos necessários para se ter um bom desempenho no curso de Cálculo. Já alguns autores defendem que a inserção das noções de cálculo ainda no Ensino Médio como a melhor solução para o problema, assim os alunos já chegariam no Ensino Superior com algum conhecimento prévio acerca dos conteúdos do assunto.

Para Machado (2015): "o melhor jeito de corrigir esse problema é justamente no Ensino Médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais". André (2008, apud Rezende, 2003) fala acerca do quanto é importante ter contato com os conceitos fundamentais do Cálculo ainda no Ensino Médio:

> Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem do atual" ensino de Cálculo" está "fora" dele e é "anterior" inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada "falta de base" dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores[...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma "falta de base" dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para aprender as ideias básicas do Cálculo[...] (REZENDE, 2003, p.31)

Diante de tantas evidências da necessidade de se fazer algo com objetivo de sanar as dificuldades dos alunos do estudo do Cálculo no Ensino superior, e levando em consideração a contribuição de diversos autores da área de ensino de Matemática podemos concluir que a inserção do Cálculo no Ensino Médio pode ser considerado uma alternativa bastante plausível para a solução desse problema. Mas essa possibilidade levanta outras várias indagações, como por exemplo: se é possível? Se sim, o que ensinar? Como ensinar? Sabendo que os alunos deste nível ainda não possuem maturidade e uma bagagem de conteúdos mais abundante.

POSSIBILIDADES DE INSERÇÃO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo buscamos apresentar algumas noções mais básicas do que é o cálculo e como essas ideias podem ser apresentadas aos alunos do ensino básico de forma mais sucinta possibilitando que esse primeiro contato com essa disciplina possa ser bem assimilada pelos estudantes.

Ao se analisar a história do Ensino de Cálculo pode-se perceber que desde o final do século XIX existe um movimento de modernização, presente em vários países europeus, com objetivo de inserir esses conceitos na escola básica. Segundo Spina (2002) a razão para esse movimento era diminuir a disparidade existente entre o Ensino de Matemática praticado nas universidades e o praticado nas escolas básicas.

O Ensino Médio é a etapa que antecede o ingresso no Ensino Superior. Assim, é nessa fase que os alunos são preparados para essa mudança brusca de níveis de ensino, pelo menos na teoria, porque na prática já vimos que não é isto que vem acontecendo. Deve-se, porém, planejar bem o que ensinar e como ensinar, haja vista que os alunos ainda não possuem uma maturidade lógica totalmente desenvolvida para interpretar o estudo do Cálculo com o nível de formalidade e abstração no qual é desenvolvido no Ensino Superior.

Rocha (2018) afirma que é possível ensinar Cálculo junto com os conteúdos já ministrados no Ensino Médio. Ela cita como exemplo, que as noções de limite podem ser ensinadas juntamente com o estudo de sequências de P.G. infinita, junto com o estudo de funções exponenciais, ou ainda, na representação de dízimas periódicas. Para a autora, ainda, os conceitos de integrais poderiam ser ensinados junto com o estudo de áreas e o conteúdo de derivadas poderia ser colocado de maneira intrínseca ao estudo de taxas de variação, sendo os dois aplicados no estudo de funções.

Machado (2015) traz o seguinte exemplo de como se aplicar essas ideias:

> O professor começa com a ideia mais simples, que é de integral, e com as funções mais simples, que são funções polinomiais de primeiro grau. Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. Assim, sempre trabalhando apenas com funções de grau 1, o professor passa as ideias mais importantes do cálculo. Isso dá para fazer em poucas horas. (MACHADO, 2015, p.1)

Com isso, fica notório que o estudo de Cálculo no Ensino Médio pode se tornar possível com uma reorganização dos programas de ensino e de uma atenção dos discentes sobre o que já é ensinado para uma nova perspectiva.

Ficando evidente a possibilidade de inserção dessa disciplina no Ensino Médio, resta sabermos quais conteúdos são possíveis de se ensinar nessa etapa de ensino, até onde se é possível aprofundar no assunto e por onde começar. Vejamos a seguir algumas possibilidades.

QUAIS CONTEÚDOS DE CÁLCULO SÃO POSSÍVEIS DE SEREM ENSINADOS NO ENSINO MÉDIO?

Apesar de ser notória a real possibilidade de se introduzir o Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio é preciso que se tenha cuidado a respeito do que se é possível ensinar e até onde é possível se aprofundar nos conteúdos, haja vista que os alunos deste nível de ensino ainda não possuem uma maturidade de raciocínio bem desenvolvida, além de não terem uma bagagem de conteúdos muito abrangentes. Se considerarmos o Cálculo com todo seu rigor, linguagem formal, definições, teoremas e demonstrações, certamente os alunos do Ensino Médio ficariam perdidos ao se depararem com tais assuntos, e claramente este não é nosso objetivo. Assim, não propomos uma antecipação do que se é estudado no Ensino Superior e sim que de início sejam apresentados conceitos básicos, introdutórios e intuitivos como primeiro contato, para que ao se deparar com estes conteúdos mais a frente não haja tanto impacto.

Machado (2015) afirma que toda ideia fundamental é formada por três características principais: primeiro ele afirma que é possível ensinar a importância de qualquer ideia fundamental através do uso de linguagens do nosso cotidiano. Em seguida ele completa dizendo que nenhuma ideia está isolada, está sempre ligada a outras ideias da mesma área ou de áreas diferentes. E finaliza afirmando que nenhuma ideia fundamental cabe apenas em uma disciplina isolada.

Rocha (2018) explica que uma ideia fundamental é inserida quando é exposta de forma contextualizada, interdisciplinar e com o uso de uma linguagem simples. O Cálculo pode ser ensinado por meio de definições e conceitos simples, através de aplicações presentes no nosso dia-a-dia como por exemplo as ideias de taxa de variação, valor médio, crescimento máximo ou mínimo, cálculo de áreas, entre outras. Estas ideias podem ser apresentadas através de conceitos de fácil compreensão.

Vejamos a seguir alguns conceitos e definições de forma mais simples e objetiva, deixando de lado o rigor e a formalidade exigida no Ensino Superior, das duas principais ideias do Cálculo: a Derivada e a Integral.

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO: AS DUAS PRINCIPAIS IDEIAS DO CÁLCULO

Nesta seção apresentamos as principais ideias de Derivadas e Integrais. Conceitos, definições e aplicações de forma sucinta, trazendo ideias intuitivas sobre os conteúdos. As definições mais formais podem ser vistas com maiores detalhes em STEWART (2016), MUNEM (1992), e em THOMAS (2008).

O estudo do Cálculo Diferencial e Integral nas universidades, é comumente precedido de um curso de pré-cálculo, onde se aborda os principais conteúdos usados no estudo dessa disciplina. Para se iniciar nesse curso é importante que se tenha uma boa bagagem de conhecimentos acerca dos conteúdos básicos da Matemática, por esse motivo é importante, sempre que se achar necessário, retornar e revisar os assuntos estudados anteriormente de Matemática básica, para que estes conteúdos estejam sempre *"frescos"* na cabeça dos alunos.

Uma boa forma de se começar o estudo de Cálculo no Ensino Médio é exatamente mostrando o que de fato é o Cálculo. Sobre isso, Ryan (2009) afirma que:

> Cálculo é basicamente toda Álgebra e Geometria avançada. Em certo sentido não é nem uma nova matéria, ele pega as regras corriqueiras da Álgebra e da Geometria e as ajusta para que possam ser usadas em problemas mais complicados o Cálculo não é uma língua morta como o Latim, falada apenas por professores. É a linguagem dos engenheiros, cientistas e economistas. (RYAN, 2009).

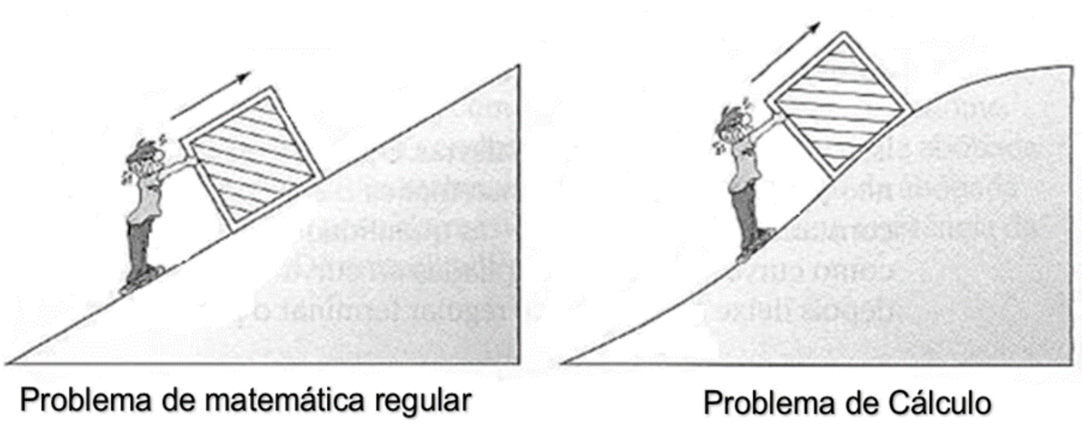
Para exemplificar o que o Cálculo significa, observe a *figura 1*. Na figura à esquerda o homem está empurrando um bloco retangular sobre uma rampa com inclinação plana. Já na figura da direita o mesmo homem empurra o bloco sobre uma superfície curva. Note que nos dois casos o problema é determinar a quantidade de energia aplicada para realizar a tarefa.

No primeiro caso o homem aplica uma quantidade de força constante, assim com algumas fórmulas simples de Matemática e Física é possível determinar essa quantidade de energia. Todavia, no segundo caso, a quantidade de força aplicada para realizar a tarefa muda de acordo com a oscilação que a superfície curva sofre.

Nos primeiros metros existe uma certa inclinação, já em seguida a inclinação aumenta e assim, é necessário aplicar uma quantidade de força maior para continuar subindo com a mesma velocidade, ou seja, a cada instante de tempo a quantidade de energia aplicada varia. Note que, não é possível resolver este problema como um todo fazendo uso apenas das fórmulas de Matemática básica. É aí que o Cálculo entra, para solucionar os problemas que a Matemática básica não dá conta de resolver.

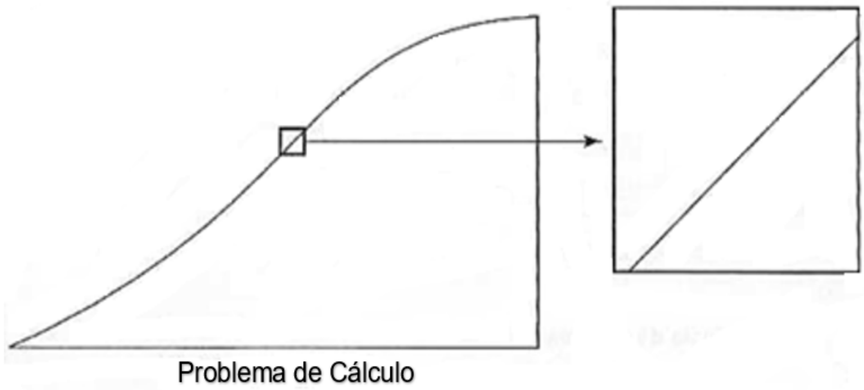
Para explicar melhor o que acontece no problema em que a superfície é curva, basta observar o seguinte, como dissemos, as fórmulas básicas não dão conta de resolver o problema como um todo, porém, se dividirmos esse problema em partes menores tomando instantes de tempo pequenos o suficiente para que a variação da curva seja desprezível, então poderemos resolvê-lo utilizando as fórmulas que já conhecemos. Veja na *figura 2* que quando tomamos um espaço muito pequeno da curva e o ampliamos, a curva se torna praticamente imperceptível e recai no problema inicial onde a superfície é plana. Após resolver cada pequeno problema separadamente basta somar todos que obteremos a resposta que procuramos. Em poucas palavras, isso é Cálculo!

Figura 1 – Diferença entre Matemática básica e Cálculo



Fonte: Ryan, 2009

Figura 2 – Divisão do problema em partes menores



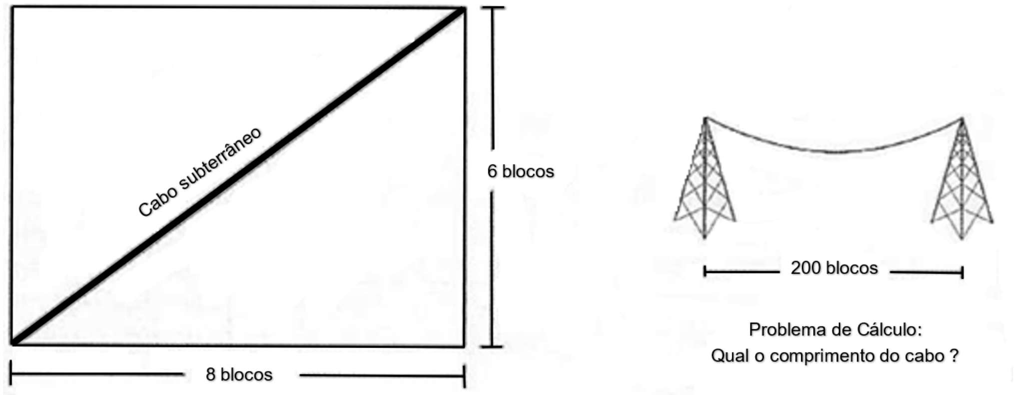
Fonte: Ryan, 2009

Após se entender a ideia que o Cálculo representa, mesmo que de forma intuitiva, sem muita formalidade, nada melhor para chamar a atenção do aluno do que apresentar algumas situações onde o Cálculo pode ser aplicado na resolução de problemas reais. Assim, vejamos alguns exemplos a seguir.

APLICAÇÕES PRÁTICAS DO CÁLCULO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Veremos agora alguns exemplos de situações em que a Matemática básica não é suficiente para resolver algum problema, sendo, assim, necessário o uso do Cálculo. Observe a *figura 3*, nos dois casos o problema é determinar o comprimento dos cabos de energia, no primeiro caso conseguimos calcular o comprimento do cabo utilizando uma simples fórmula matemática. Já no segundo caso, precisamos do Cálculo para resolvê-lo. Perceba que se trata de um problema de grande importância para uma empresa de distribuição de energia, haja vista que ela precisa cobrir uma grande área e para isso necessita de uma grande quantidade de metros de cabo, assim um cálculo preciso desta metragem é importante para que não haja desperdícios e nem falta do material, pois nos dois casos isso pode significar prejuízo financeiro para a empresa.

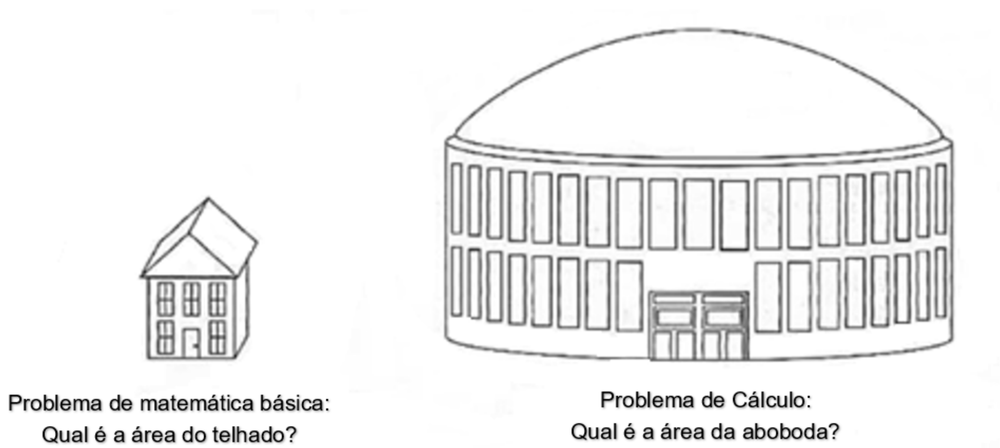
Figura 3 – Problema de Cálculo



Fonte: Ryan, 2009

É possível calcular a área de um telhado de superfícies planas utilizando as fórmulas da Matemática básica, mas se precisar calcular essa mesma área em um telhado com formato de abóbada com na *figura 4*, será necessário utilizar o cálculo. Novamente perceba que se trata de um problema importante para a engenharia, pois o cálculo preciso da quantidade de material utilizado em uma obra pode evitar o desperdício, o que tem um impacto direto no lucro da empresa.

Figura 4 – Problema de Cálculo

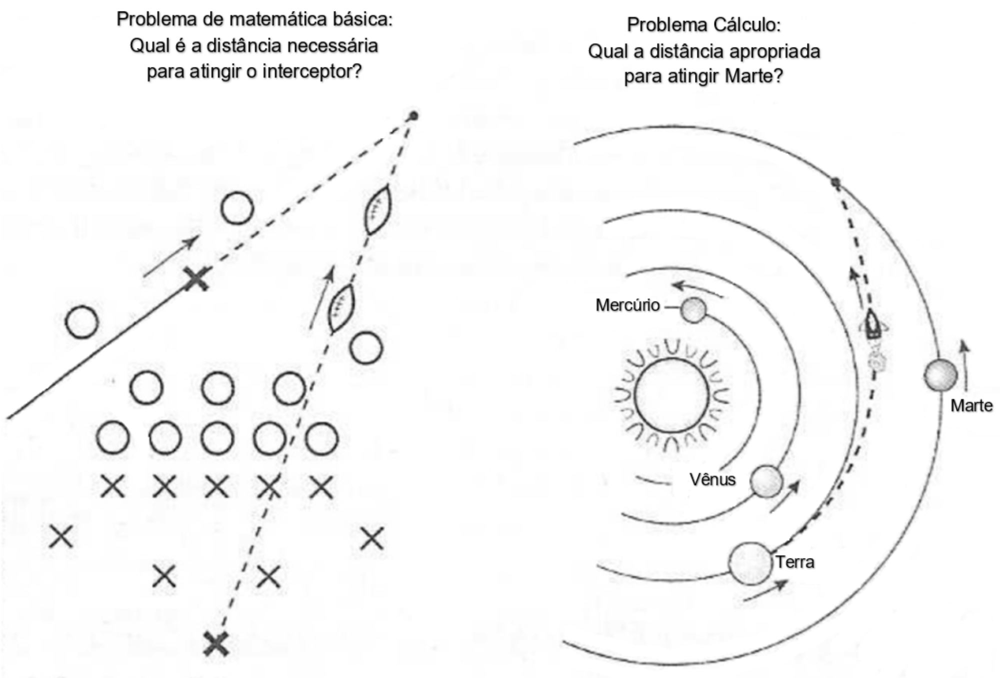


Fonte: Ryan, 2009

Em um jogo de futebol, é possível calcular a distância que a bola precisa percorrer de um zagueiro até um atacante para que o passe seja completado. Para isso a Matemática básica é suficiente. Porém, quando a Nasa, em 1975, precisou calcular a trajetória que o satélite *Viking I* deveria percorrer até chegar à marte, como ilustra a *figura 5* ela precisou fazer uso do Cálculo, pois tanto a Terra quanto Marte giram em torno do Sol percorrendo uma trajetória em formato elíptico. Agora note a importância de um evento dessa magnitude e perceba o tamanho do prejuízo que um erro nos cálculos desse lançamento pode causar.

Estes são apenas alguns exemplos de situações que o Cálculo é usado para resolver um problema real. Ao se aprofundar um pouco nesse estudo é possível encontrar inúmeras aplicações desse tipo, reafirmando assim, a importância dessa disciplina na vida acadêmica do estudante.

Figura 5 – Problema de Cálculo



Fonte: Ryan, 2009

NOÇÕES ACERCA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Nesta seção apresentamos alguns conceitos mais básicos que versam sobre o Cálculo Diferencial e Integral e que, a partir do estudo supracitado, consideramos possíveis de serem abordados ainda no Ensino Médio. Os conceitos a seguir apresentam um pouco mais de formalidade do que as ideias mais intuitivas abordadas anteriormente, embora ainda seja de forma bem introdutória, já podem trazer ao aluno uma ideia do que eles verão posteriormente no ensino superior. Ademais, trazemos alguns exemplos da aplicação dessas definições na resolução de problemas, mostrando assim a grande aplicabilidade desse conteúdo na vida acadêmica dos estudantes.

O QUE É A DIFERENCIAÇÃO?

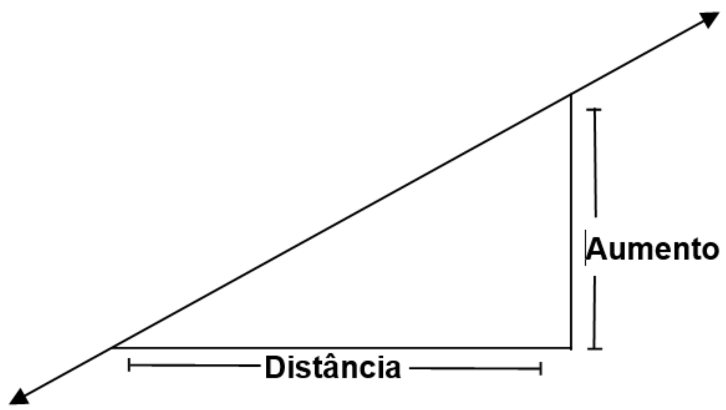
Segundo Ryan, diferenciação é:

> Diferenciação é o processo de achar a derivada, e a derivada de uma curva é apenas um termo sofisticado do cálculo para a inclinação da curva. A inclinação da curva é também uma simples razão, como quilômetros por hora ou preço por item.

Lá na Álgebra aprendemos que a inclinação da reta é uma razão que envolve o aumento de alguma grandeza pela distância percorrida. Exemplificando, temos: $\text{inclinação} = \frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$

Como ilustra a *figura 6*. É um conceito simples de entender, que pode ser deduzido através de fórmulas básicas da Matemática.

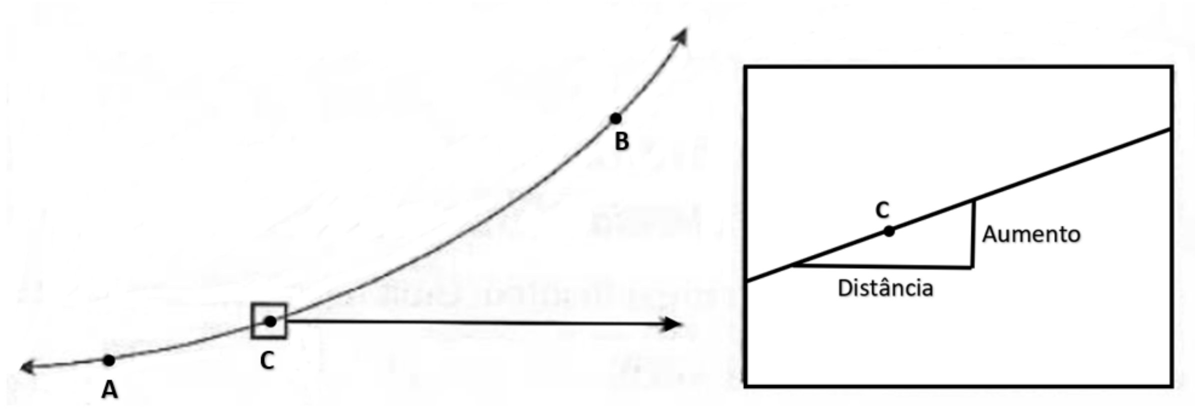
Figura 6 – Inclinação da reta



Fonte: Elaborada pelo autor

Já em uma curva, a inclinação muda constantemente, assim, precisamos usar a ideia do Cálculo de repartir esse problema em pequenas partes, como mostra a *figura 7*, para resolvê-lo. Essa ideia é útil principalmente quando queremos determinar essa inclinação em um ponto específico da curva. Exemplificando com uma aplicação real, se tivermos a curva de uma função que representa a velocidade média de um corpo qualquer. Sabemos lá da Física que, $velocidade\ média = \frac{distância}{tempo}$, logo se aplicarmos a ideia do Cálculo de repartir o problema para encontrar essa inclinação em um ponto específico, na verdade estaremos calculando a velocidade instantânea desse corpo em um determinado instante de tempo.

Figura 7 – Inclinação de uma curva



Fonte: Ryan, 2009

Portanto, verificamos que a derivada nada mais é do que uma razão. A diferença está basicamente na forma com que resolvemos o problema, ao invés de resolvê-lo de uma única vez, repartimos em partes muito pequenas. Ao estudar os conceitos de limites posteriormente o aluno compreenderá melhor o conceito de repartir o problema em partes infinitesimais. Por enquanto é melhor ficar assim, pois essa divisão explicada com maior rigor envolve o conceito de infinito, o que ainda pode ser muito abstrato para um aluno desse nível de ensino.

Como vimos, o conceito de derivada é bem intuitivo, entretanto, na prática, o processo para fazer essa divisão do problema em partes menores e chegar ao resultado que queremos não é tão simples, e envolve o cálculo de *limites*, assunto que não abordamos neste trabalho. Felizmente, não precisamos realizar esses cálculos detalhados sempre que precisamos resolver um problema. Para facilitar nossa vida, existem algumas regras gerais que nos permitem derivar funções de forma mais direta sem termos que recorrer às definições de limite para isso. Vejamos a seguir algumas dessas regras que são mais utilizadas na resolução de problemas.

LISTA DE DERIVADAS

Separamos algumas das regras mais comumente utilizadas na resolução de exercícios e que consideramos mais adequadas para um primeiro contato dos alunos por se tratarem de regras mais diretas. Vejamos:

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}Cx = C$
4. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
5. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
6. $\frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$
7. $\frac{d}{dx}a^x = a^x lna$
8. $\frac{d}{dx}log_a x = \frac{1}{x}\frac{1}{lna}$
9. $\frac{d}{dx}senx = cosx$
10. $\frac{d}{dx}cosx = -senx$
11. $\frac{d}{dx}tgx = sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}cotgx = -cossec^2 x$
13. $\frac{d}{dx}secx = secx \cdot tgx$
14. $\frac{d}{dx}cossecx = -cossecx \cdot cotgx$

Essas regras de derivação são arbitrárias. Vejamos a seguir alguns exemplos de derivadas de funções específicas.

EXEMPLOS DE DERIVADAS DE FUNÇÕES

Para derivar funções mais simples podemos usar a substituição direta, ou seja, basta aplicar a regra de derivação adequada e realizar os cálculos necessários. Segue alguns exemplos:

1. $\frac{d}{dx}5 = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}5x = 5$
4. $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$
5. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
6. $\frac{d}{dx}ln2 = \frac{1}{2}$
7. $\frac{d}{dx}4^x = 4^x ln4$
8. $\frac{d}{dx}log_5 x = \frac{1}{x}\frac{1}{ln5}$
9. $\frac{d}{dx}senx = cosx$
10. $\frac{d}{dx}cosx = -senx$
11. $\frac{d}{dx}tgx = sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}cotgx = -cossec^2 x$
13. $\frac{d}{dx}secx = secx \cdot tgx$
14. $\frac{d}{dx}cossecx = -cossecx \cdot cotgx$

EXEMPLO DA APLICAÇÃO DA DERIVADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Já vimos algumas regras de derivação e suas aplicações diretas em funções, agora veremos uma aplicação na resolução de um problema em que se é possível chegar a resposta por meio da aplicação direta das regras de derivação.

Problema: Seja $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ a função que determina a trajetória de um projétil lançado para o alto. Qual a altura máxima, em metros, que este projétil pode alcançar?

Solução: Primeiro note que, o coeficiente líder (coeficiente do termo de maior expoente) é negativo, isso significa que o gráfico dessa parábola tem sua concavidade voltada para baixo, (*veja a figura 8*), logo, faz sentido falar em ponto máximo.

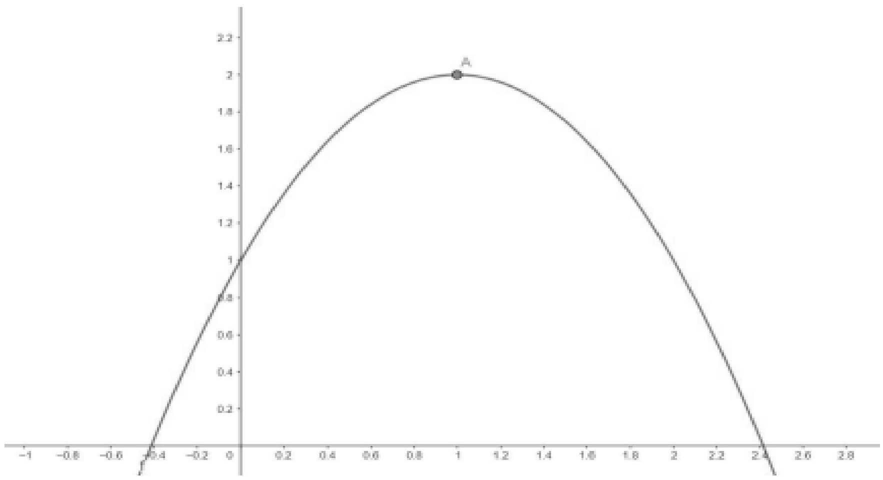
Sabemos que a derivada de uma função nos fornece a taxa de variação em um determinado instante, por outro lado, o instante que nos fornece o ponto máximo dessa função é exatamente o instante em que essa taxa de variação é igual a zero. Portanto, para encontrar o valor de nesse instante basta derivar a função e igualá-la a zero:

$$\frac{d}{dx}(-x^2 + 2x + 1) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-2} \to 1$$

Agora, substituindo o valor de na nossa função, encontraremos o seu valor máximo.

Portanto, a altura máxima que o projétil pode alcançar é de 2 metros.

Figura 8 – Gráfico da função que determina a trajetória do projétil



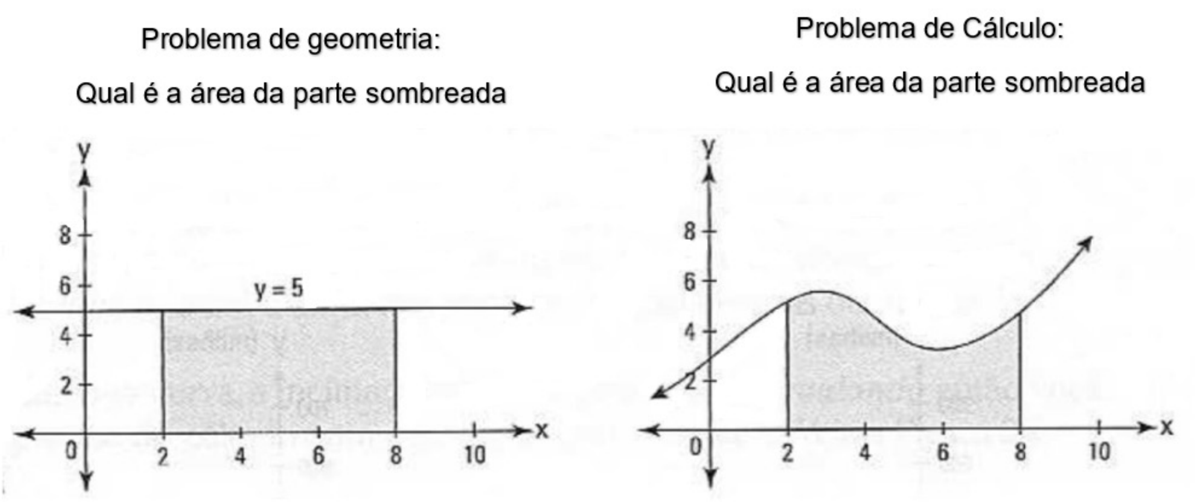
Fonte: elaborada pelo autor

O QUE É INTEGRAÇÃO?

A integração é a segunda das grandes ideias do Cálculo, mas, na verdade, seguindo uma ordem cronológica, o estudo das integrais antecedeu o estudo das derivadas. A princípio, o estudo das integrais nada tinha a ver com as derivadas, que, como já vimos, nada mais é do que uma razão que nos fornece a inclinação de uma curva em um determinado ponto. O estudo das integrais, no entanto, está ligado ao estudo de áreas, só que não de polígonos regulares como comumente estudamos na escola, e sim, de regiões curvas. De forma resumida, a integração é a soma de pequenas áreas para se obter o valor de uma área maior.

Para entender melhor observe a *figura 9*. Caso você precise determinar a área da região que está abaixo da reta y=5, não terá problemas para fazê-lo, pois basta utilizar a fórmula da área do retângulo já conhecida lá da Geometria Plana para isso. Já para determinar a área da região que está abaixo da curva como mostra a *figura 9* à direita, não é tão direto, pois note que não existe fórmula pronta para este tipo de problema. É aí que entra o Cálculo, para encontrar soluções para os problemas que a Matemática básica não é suficiente para resolver.

Figura 9 – Problemas do cálculo de áreas

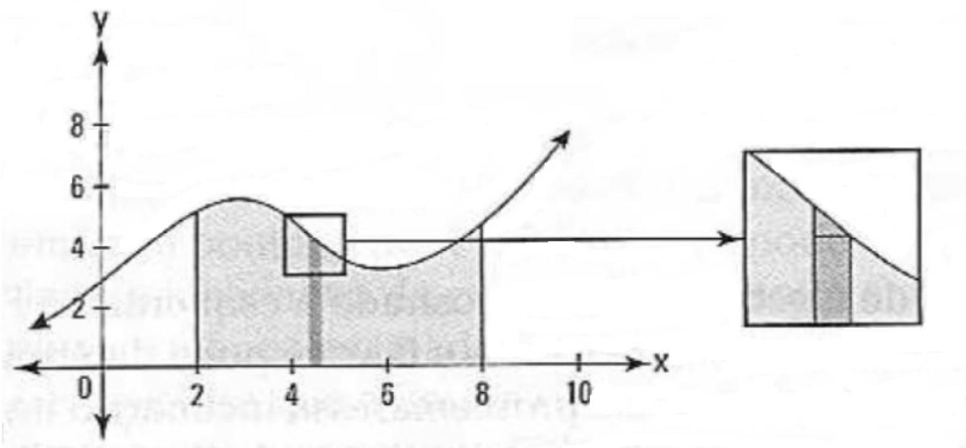


Fonte: Ryan, 2009

É quase impossível determinar esta área de uma uma única vez, mas se repartimos esta região em partes menores de tal forma a termos vários retângulos de mesma largura, então podemos afirmar que a área da soma desses retângulos estará próxima da área da região abaixo da curva. Observe que, como mostra a *figura 10*, quanto maior for o número de retângulos na qual dividimos esta região, mais a área da soma dos retângulos se aproximará da área da região abaixo da curva. Quando dividimos esta região em uma quantidade muito, muito grande de retângulos, então estas áreas coincidirão.

Obviamente não vamos realizar esse cálculo dessa forma sempre que precisarmos resolver um problema desse tipo, para isso existem algumas regras de integração que facilitam nossa vida na hora de calcular essas áreas. vejamos agora uma lista com as principais integrais indefinidas.

Figura 10 – Inclinação de uma curva



Fonte: Ryan, 2009

LISTA DE INTEGRAIS

Separamos algumas das regras mais comumente utilizadas na resolução de exercícios e que consideramos mais adequadas para um primeiro contato dos alunos por se tratarem de regras mais diretas. Vejamos:

1. $$\int dx = x + c$$

2. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (x \neq -1)$$

3. $$\int e^x \, dx = e^x + c$$

4. $$\int \frac{dx}{x} = ln|x| \; + c$$

5. $$\int a^x dx = \frac{1}{lnx} \cdot a^x + c$$

6. $\displaystyle\int lnx\ dx = x(lnx - 1) + c$

7. $\displaystyle\int senx\ dx = -cosx$

8. $\displaystyle\int cosx\ dx = senx$

9. $\displaystyle\int tgx\ dx\ \ = -ln|cosx| + c$

10. $\displaystyle\int cotx\ dx\ \ = -ln|senx| + c$

11. $\displaystyle\int secx\ \ = ln|secx + tgx| + c$

12. $\displaystyle\int sec^2x\ dx = tgx + c$

13. $\displaystyle\int cossec^2x\ \ = -cotgx + c$

14. $\displaystyle\int cossecx\ dx = -ln|cossecx + cotgx| + c$

15. $\displaystyle\int secx \cdot tgx\ dx = secx + c$

Essas regras de integração são arbitrárias. Vejamos a seguir alguns exemplos de integrais de funções específicas.

EXEMPLOS DE INTEGRAIS DE FUNÇÕES

Para integrar funções mais simples podemos usar a substituição direta, ou seja, basta aplicar a regra de integração adequada e realizar os cálculos necessários. Segue alguns exemplos:

1. $\displaystyle\int x^2\ dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3}$

2. $\displaystyle\int (x^3 - X^2 - 1)\ dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C$

3. $\int (x^3 - senx + \frac{1}{x})\ dx = \frac{x^4}{4} + cosx + ln|x| + c$

4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x|\ + c$

5. $\int 4^x dx = \frac{1}{lnx} \cdot 4^x + c$

6. $\int lnx\ dx = x(lnx - 1) + c$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA INTEGRAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Problema: Imagine que você precisa construir um muro e nele deixar uma abertura com formato de arco. Será necessário calcular a área dessa abertura para fazer o desconto na compra do material. Se o formato desse arco é Determinado pela curva . Qual a área dessa região, em determinada por essa curva?

Solução: Vamos considerar que a linha do solo será determinada pelo eixo . Assim, para determinar as extremidades do arco, que serão nosso limite de integração basta fazer,

$5x - x^2 = 0,\ x = 0\ ou\ x = 5$

Agora, aplicando esses limites na integral definida pelos limites x=0 e x=5, temos:

$$\int_0^5 (5x - x^2)\ dx = \left(5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = 5 \cdot \frac{5^2}{2} - \frac{5^3}{3} - 5 \cdot \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} = \frac{5}{6} m^2 = 0.8333\ m^2$$

A RELAÇÃO ENTRE A DERIVADA E A INTEGRAL

Apresentamos as duas grandes ideias do Cálculo: a diferenciação e a integração. Durante a história, o estudo de ambas foi desenvolvido de forma paralela, sem que um tivesse relação com o outro. Como pudemos ver anteriormente, são duas ideias distintas, uma referente a determinação da inclinação da reta tangente a curva em um ponto e a outra referente ao cálculo de áreas.

Realmente de início elas parecem não ter conexão alguma. Porém, não é bem assim. No século XVII Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) perceberam que, na verdade, elas estão ligadas de forma intrínseca. Junto com o Cálculo iniciou-se também o estudo das Equações Diferenciais. Os dois teoremas básicos do Cálculo estão ligados diretamente a solução da Equação Diferencial x'(1)=f(t).

A solução dessa equação consiste em encontrar uma função desconhecida x(t) uma vez que se conhece a sua derivada f(t). O Teorema Fundamental do Cálculo nos dá a solução para este problema, ele afirma que $\int_a^t \square f(z)\,dz$(se f (se for contínua). E o Teorema do Valor Médio afirma que todas as suas soluções podem ser escritas na forma $c+\int_a^t \square f(z)\,dz$, , em que c é uma constante.

Em outras palavras, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral são considerados operações inversas. Se você derivar uma função, para retornar a função original basta integrá-la e vice-versa. Como dizia Beatriz Mello, “a Matemática é a base de todas as belezas da vida”.

RESULTADOS

Para reunir argumentos que ratificassem nossa hipótese, realizamos uma pesquisa bibliográfica em uma vasta bibliografia de autores que apresentam, além de suas opiniões, dados que confirmam o resultado que esperávamos.

Este trabalho objetivou apresentar argumentos que justifiquem a inserção do estudo dos conteúdos do Cálculo no Ensino Médio com o intuito de combater o fraco desempenho dos alunos no Ensino Superior ao se depararem com a disciplina.

Na primeira parte deste trabalho, apresentamos um pouco da história do Ensino de Cálculo no Brasil. Por meio da bibliografia estudada, encontramos fontes que mostram que o Cálculo já fez parte da grade curricular do Ensino Médio, reafirmando assim a nossa hipótese de que é possível realizar esta inserção.

Em seguida, trazemos alguns dados que comprovam o baixo rendimento dos alunos nos cursos que possuem o Cálculo em seu currículo. E a opinião de vários autores que afirmam categoricamente que o impacto do primeiro contato com a disciplina é um dos motivos que podem agravar esse rendimento ínfimo dos alunos.

Após essas confirmações, mais adiante, questionamos como abordar os conteúdos desta disciplina nesta etapa de ensino onde os alunos ainda possuem uma maturidade reduzida. Assim concluímos a esse respeito que uma forma plausível de realizar esta tarefa é apresentar os conceitos e definições do conteúdo de forma introdutória, sem o rigor matemático exigido no Ensino Superior.

Assim, concluímos que a hipótese de nossa pesquisa foi confirmada pelos dados apresentados e pelos argumentos defendidos pelos autores supracitados. Ou seja, a inserção do estudo dos conteúdos do Cálculo, além de possível, se mostra como uma alternativa que pode amenizar a dificuldade dos alunos com a disciplina no Ensino Superior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, a disciplina de Cálculo é considerada uma das mais importantes da grade curricular de vários cursos em Universidades onde é ministrada, muita dessa importância se deve a grande possibilidade de aplicações que ela possui em várias áreas de atuações em inúmeras profissões. Entretanto, é também uma das disciplinas responsáveis por um dos maiores níveis de não aprovação dos cursos.

Diante disso, este trabalho buscou apresentar argumentos que possam afirmar que a introdução dos conceitos abordados nessa disciplina, de forma introdutória, pode ser um atenuante dessa dificuldade, uma vez que assim os alunos já chegariam ao Ensino Superior com algum conhecimento acerca da disciplina.

Durante o trabalho foi visto que em um passado recente a disciplina de Cálculo já esteve presente no Ensino Médio, mostrando que essa mudança é totalmente possível, dependendo apenas de uma reorganização dos conteúdos da grade curricular. Além disso, apresentamos dados que reafirmam tal dificuldade apresentada pelos alunos e a opinião de autores que compactuam com a ideia de que esta é solução plausível para o problema.

Mediante o exposto, considera-se que os objetivos do trabalho foram alcançados, haja vista que por meio da pesquisa realizada obteve-se os argumentos que reafirmam nossa hipótese de solução para o problema abordado, ou seja, obteve-se os resultados esperados.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, S. L.C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio**. Dissertação do Mestrado em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ÁVILA, G. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese de Doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

MACHADO, Nilson José. **Cálculo no ensino médio: já passou da hora**. São Paulo: Blog Imaginário Puro, 2015. Disponível em: < https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-o-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>. Acesso em: 26 de dezembro de 2022.

MOLON, Machado. **Cálculo no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra**. Dissertação de Mestrado em Matemática - Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria - RS, 2013.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo, Volume** 2. Rio de Janeiro: Guanabara, 1992.

RAFAEL, Rosane Cordeiro. **Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação**. Dissertação do Mestrado em Matemática – Universidade Federal de Juiz de Fora. 2017.

REIS, Frederico da Silva. 2001. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a Visão de Professores - Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. Campinas – SP: Tese de Doutorado, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

ROCHA, Joice Stella de Melo. **O Ensino de Cálculo no Ensino Médio**. 62 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João Del Rei, Departamento Matemática e Estatística. 2018.

RYAN, Mark. **Cálculo para Leigos**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Alta books, 2009.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O ENSINO MÉDIO**. 177 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, instituto de geociências e ciências exatas. Rio Claro. 2002.

STEWART, J. **Cálculo: volume 1**. 5 ed. São Paulo: Thomson, 2006. THOMAS, G. B. **Cálculo: volume 1**. 11 ed. São Paulo: Pearson, 2008.