Revista Física no Campus, v. 2, n. 1, p. 32-37, Campina Grande - PB, 2022

Universidade Estadual da Paraíba

http://novo.revista.uepb.edu.br/fisicanocampus

Artigo Original

O Uso de Progressão Geométrica para Cálculo de Áreas Abaixo das Curvas do Tipo $f(x) = x^n$

The Use of Geometric Progression for Calculation of Areas Under Curves of Type $f(x) = x^n$

Maxwell Aires da Silva[1], Salomão Pereira de Almeida[2]

[1]Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, Brasil;
[2]Instituto Federal da Paraíba, Campina Grande, PB, Brasil.

Resumo: Nesse artigo os autores apresentam uma proposta de atividade que une os conceitos de função de tipo exponencial e progressão geométrica, conforme está prescrito nas competências da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, para ser aplicada em uma turma do primeiro ano do ensino médio, e para alcançar tal objetivo a ferramenta metodológica que se usou foi a história da matemática como recurso didático. Propõe-se contar como o francês Pierre de Fermat encontrou uma fórmula para calcular a área abaixo de uma curva da forma $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, problema esse que os antigos gregos tentaram na sua época resolver, porém sem sucesso.

Palavras chave: funções, progressões, história da matemática.

Abstract: In this article, the authors present an activity proposal that join the concepts of function of exponential type and geometric progression, as prescribed in the competences of the National Common Curricular Base - BNCC, to be applied in a first year high school class, and to achieve this objective, the methodological tool used was the History of Mathematics as a didactic resource, in this case, proposing to tell how the French Pierre de Fermat found a formula to calculate the area under a curve of the form $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, problem this that the ancient greeks tried to solve in their age, but without success.

Keywords: functions, progresions, history of mathematics.

[1] maxwellaires@servidor.uepb.edu.br
[2] salomao.almeida@ifpb.edu.br

Introdução

No primeiro ano do ensino médio os alunos têm contato com os conteúdos da disciplina de Matemática, geralmente, na seguinte ordem: conjuntos, funções, progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG). Em muitos livros didáticos, os conteúdos de funções, PA e PG são apresentados de maneira isolada (separados um do outro) como se fossem totalmente disjuntos. No entanto, sabe-se que há uma ligação muito forte entre esses temas, tanto é fato que a Base Nacional Comum Curricular - BNCC recomenda que os alunos adquiram a habilidade de associar esses conteúdos, sendo as progressões vistas como funções cujo domínio é um conjunto discreto. De acordo com [2], os alunos devem ser capazes de “identificar e associar progressões aritméticas a funções afins e as progressões geométricas a funções exponenciais, ambas de domínios discretos, para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas”.

Essa associação pode ser feita da seguinte maneira: considerando (a_1, a_2, ..., a_n, ...) uma PA de razão r com $n \in \mathbb{N}$ o termo geral dessa PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Agora, efetuando algumas manipulações algébricas, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot r \\ &= a_1 + nr - r \\ &= rn + (a_1 - r) \end{aligned}$$

e chamando $r = a$ e $a_1 - r = b$, tem-se $a_n = an + b$, e desse modo, o termo geral de uma PA tem a mesma expressão algébrica de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$.

Note a semelhança a seguir:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax + b \qquad\qquad n \mapsto an + b$$

ou seja, *a discretização de uma função afim está associada a uma PA*, ou, nas palavras de [6]: “(a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), etc. estão em linha reta”. Analogamente, tomando uma PG (a_1, a_2, ... a_n,...) de razão $q \neq 0$ seu termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Novamente efetuando uma manipulação algébrica, vem

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= a_1 \cdot \frac{q^n}{q} \\ &= \frac{a_1}{q} \cdot q^n \end{aligned}$$

e chamando $\frac{a_1}{q} = b$ e $q = a$, obtém-se $a_n = b \cdot a^n$, e com isso o termo geral de uma PG tem a mesma expressão algébrica de uma função de tipo exponencial da forma $f(x) = b \cdot a^x$.

Observe a semelhança:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad\qquad s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto b \cdot a^x \qquad\qquad n \mapsto b \cdot a^n$$

isto é, a *discretização de uma função de tipo exponencial está associada a uma PG*, novamente nas palavras de [6]: ”pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.”

Perceba a dinamicidade e praticidade que essa abordagem pode trazer para as aulas de Matemática, pois agora o aluno não precisa enxergar os conteúdos como sendo distintos, antes, as progressões são casos particulares de funções, porém analisadas sob perspectivas diferentes. Além disso, apresentando para o aluno um pano de fundo histórico do conteúdo a ser ensinado essa aula certamente ficará mais rica e dinâmica, pois segundo [3]: “a história da matemática é, no entanto, uma fonte rica de problemas interessantes e desafiantes que podem ser incorporados ao ensino da Matemática, especialmente na forma de atividades de redescobertas ou de resolução de problemas". Complementando, [5] diz que "o uso da história como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino aprendizagem da matemática que permite uma ressignificação do conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos".

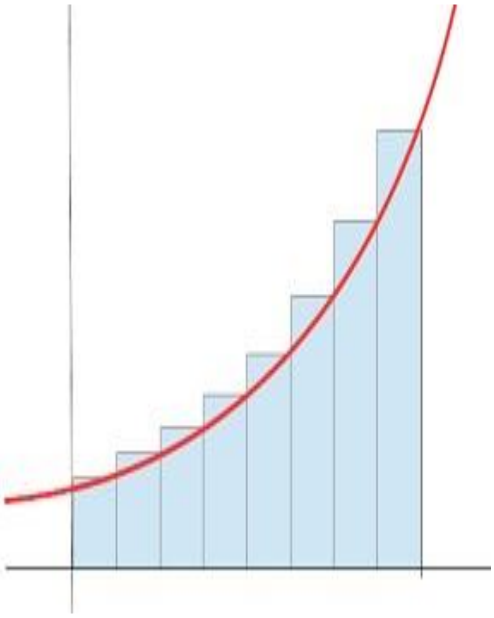
Cálculo da área de uma função da forma $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, usando PG

Pensando nesse aspecto, elaborou-se, baseados em [1] e [4], uma atividade envolvendo o ensino de funções e PG usando a História da Matemática como recurso metodológico para a determinação de uma expressão (fórmula) para o cálculo da área abaixo de uma curva (função) da forma $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

A História do Problema

Desde a antiguidade na Grécia, os matemáticos e filósofos da época, como Euclides de Alexandria (360 a.C. – 295 a.C.) estudou formas de obter uma expressão que lhe permitisse calcular a área abaixo de curvas, no entanto, não obteve sucesso em sua pesquisa. Contudo, foi nessa época que o método que até hoje se usa para efetuar tais cálculos foi desenvolvido, o chamado *método da exaustão*, que consiste em tomar a curva e encaixar retângulos justapostos abaixo dela e limitado inferiormente pelo eixo das abcissas de modo a obter uma aproximação da área desejada. Feito o cálculo aproximado, tomam-se os retângulos e diminuem-se as suas larguras para efetuar novamente os cálculos obtendo assim, uma melhor aproximação da área desejada, repetindo-se *exaustivamente* esse processo, obtém-se uma aproximação tão boa quanto se deseje. A figura a seguir descreve um passo desse método.

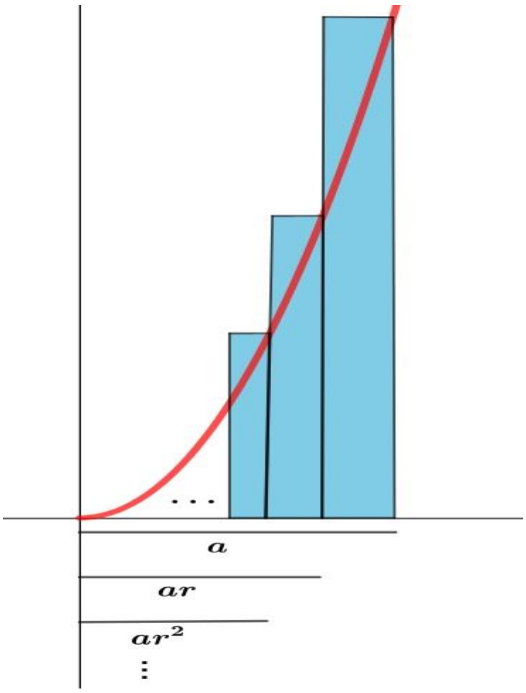
Fig. 1: O método da exaustão.



Fonte: https://climatescienceteaching.org

Mais de um milênio se passou e a solução desse problema insistia em não aparecer. Contudo, por ironia ou não da história, uma curiosidade interessante se revela aqui, e depois de tantos anos e de tantos matemáticos debruçarem-se nele, um jurista francês que nas horas vagas estudava matemática chamado Pierre de Fermat (1601 - 1665) conseguiu a tão esperada expressão, e para isso, usou o método da exaustão criado pelos gregos, porém, de maneira bem engenhosa, a saber: fez com que as larguras dos retângulos que estavam sobre a curva formassem uma PG decrescente infinita conseguindo assim o resultado esperado. Devido a sua grande e importante contribuição para a Matemática, especialmente nas áreas de Geometria Analítica e Teoria dos Números, Fermat é chamado pela comunidade matemática de *o príncipe dos amadores*, sendo o "*príncipe*" um adjetivo honroso e "*amador*" pelo fato de não ser matemático de profissão. A figura a seguir ilustra essa situação:

Fig. 2: O método usado por Fermat.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Solução de Fermat

Vamos agora apresentar como foi que Fermat resolveu tal problema. Para calcular, nesse caso, uma aproximação (tão boa quanto se deseje) da área abaixo da curva definida por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, basta calcular a área de cada um dos infinitos retângulos e em seguida somar todos. Observe as áreas de cada um deles a seguir:

Retângulo 1:

$$\begin{aligned}(a - ar) \cdot a^n &= a(1-r) \cdot a^n \\ &= a^{n+1}(1-r);\end{aligned}$$

Retângulo 2:

$$\begin{aligned}(ar - ar^2) \cdot (ar)^n &= ar(1-r) \cdot (ar)^n \\ &= ar^{n+1}(1-r);\end{aligned}$$

Retângulo 3:

$$\begin{aligned}(ar^2 - ar^3) \cdot (ar^2)^n &= ar^2(1-r) \cdot (ar^2)^n \\ &= (ar^2)^{n+1}(1-r);\end{aligned}$$

$$\vdots$$

Retângulo k:

$$\begin{aligned}&(ar^{k-1} - ar^k) \cdot (ar^{k-1})^n \\ &= ar^{k-1}(1-r) \cdot (ar^{k-1})^n \\ &= (ar^{k-1})^{n+1}(1-r).\end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, a soma das áreas dos retângulos é um pouco maior do que a área abaixo da curva, e Fermat percebeu que esse excesso era cada vez menor ao passo que a razão da PG se aproximava de 1 ou seja, quanto mais próximo de 1 a razão da PG for, menor será o erro cometido, e isso se justifica pelo fato de sempre aparecer na expressão de cada área o fator $1 - r$ indicando que as larguras vão ficando menores mais rapidamente, diminuindo assim o erro cometido. Agora, note-se que as áreas dos retângulos formam também uma PG decrescente, de fato,

$$\begin{aligned}\frac{\textbf{Retângulo } \boldsymbol{k}:}{\textbf{Retângulo } \boldsymbol{k-1}:} &= \frac{(ar^{k-1})^{n+1}(1-r)}{(ar^{k-2})^{n+1}(1-r)} \\ &= \frac{a^{n+1}(r^{k-1})^{n+1}}{a^{n+1}(r^{k-2})^{n+1}} \\ &= \frac{a^{n+1}(r^{k-2})^{n+1}}{a^{n+1}(r^{k-2})^{n+1}} r^{n+1} \\ &= r^{n+1}.\end{aligned}$$

e como o quociente é constante, segue que a sequência formada pelas áreas dos retângulos é uma PG, igualmente decrescente. Ora, como são infinitos retângulos justapostos, para calcular a soma das áreas deles basta nesse caso somar os termos de uma PG decrescente infinita, que é calculada usando a expressão:

$$\mathcal{S} = \frac{a_1}{1-q},$$

em que a_1 é o primeiro termo da PG e q é a razão. Então, como $a_1 = a^{n+1}(1-r)$ e $q = r^{n+1}$ segue-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}} \\ &= \frac{a^{n+1}(1-r)}{(1-r)(1+r+\cdots+r^n)} \\ &= \frac{a^{n+1}}{1+r+\cdots+r^n}\end{aligned}$$

e quanto mais próximo r for de 1, mais próximo a soma dos termos no denominador será de $n + 1$, e desse modo a área é dada por:

$$\mathcal{S} = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

AIRES DA SILVA, 2016, p.22 nos diz que Fermat chegou a esta expressão cerca de 30 anos antes de Newton apresentar o Cálculo Diferencial para a comunidade científica e, por outros métodos, chegar à mesma conclusão de Fermat, porém, usando o conceito de integral de uma função, a saber,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

em que C é uma constante de integração.

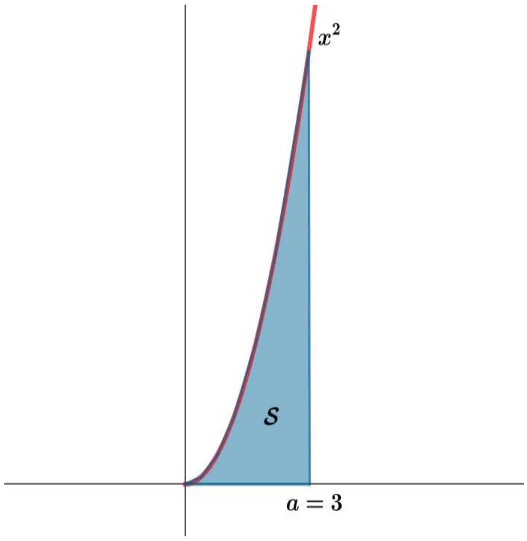
Exemplos Práticos

Agora conhecendo uma expressão que determina a área abaixo da curva, pode-se fazer exemplos práticos usando tal expressão na sala de aula, conforme é proposto a seguir:
Essa seção também deve conter uma descrição completa do material, ferramenta ou plataforma utilizado. Incluir figuras se possível e identificá-las.

Exemplo 1: Considerando a curva $f(x) = x^2$, com $x \geq 0$. Calcule a área abaixo dessa parábola entre $x = 0$ e $x = 3$.

Solução: Pelos dados do problema, temos uma parábola considerada apenas no primeiro quadrante. Além disso, vale que $a = 3$ e $n = 2$, e a figura a seguir que ilustra a situação:

Fig. 3: Ilustração.



Fonte: Elaborada pelo autor

Desse modo, a área vale:

$$\mathcal{S} = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{3^{2+1}}{2+1} = \frac{27}{3} = 9\ u.a,$$

Em que $u.a$ indica *unidades de área.*

■

Exemplo 2: Considerando a curva $f(x) = x^3$, com $x \geq 0$. Calcule a área abaixo dessa parábola entre $x = 1$ e $x = 2$.

Solução: Perceba que essa região pode ser calculada usando-se a seguinte estratégia: calcula-se a área entre $x = 0$ e $x = 2$ e subtrai esse resultado do cálculo da área entre $x = 0$ e $x = 1$. Desse modo, chamando a área entre $x = 0$ e $x = 2$ de $\mathcal{S}_2$ tem-se $a = 2, n = 3$ e note o seguinte:

$$\mathcal{S}_2 = \frac{2^{3+1}}{3+1} = \frac{16}{4} = 4\ u.a,$$

Agora chamando a área entre $x = 0$ e $x = 1$ de $\mathcal{S}_1$ tem-se $a = 1, n = 3$ e

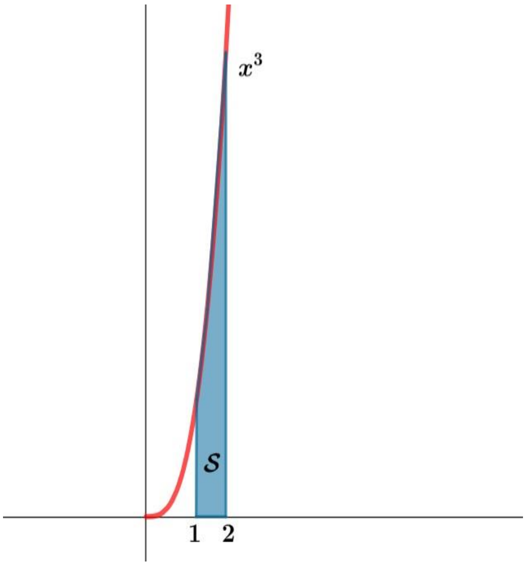
$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{4}\ u.a$$

Logo,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}\ u.a.$$

A figura a seguir a qual esboça a área calculada:

Fig. 4: Ilustração.



Fonte: Elaborada pelo autor

Considerações Finais

Note como foi possível (e não foi difícil!) colocar em prática a equação conseguida por Fermat. Observe como a história do problema deu vida e contexto à aula a ser ministrada, além de mostrar que a Matemática é desenvolvida pela humanidade conforme surgem problemas, dificuldades ou necessidades inerentes a cada geração.

Referências

[1] AIRES DA SILVA, Maxwell. **Um Matemático chamado Euler**: Um Passeio Pela sua Obra. - 1.ed. - Saarbruken, Novas Edições Acadêmicas, Deutschland / Niemcy, 2016.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[3] FOSSA, J. A. VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

[4] MAOR, Eli. ***e***: **A História de um Número**. São Paulo: Record, 1994.

[5] MENDES, Iran A.; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática fundamentos e sugestões didáticas pra professores**, Belém: SBHMat, Ano 2016.

[6] MORGADO. A. C. CARVALHO. P. C. P. **Matemática Discreta** - 2.ed. - Rio de Janeiro, SBM, Coleção PROFMAT, 2015.

[7] https://climatescienceteaching.org, acesso em 09/03/2022 às 21:03.