Revista Física no Campus, vol. 03, N 2., p. 22 – 39 (2023)
http://novo.revista.uepb.edu.br/fisicanocampus
Seção: Artigos Gerais
ISSN: 2764–5924

Estudo e Divulgação da Mecânica Quântica Relativística da Equação de Klein-Gordon à Nivel de Graduação

Victor Grana de Lima[1*] **e Prof. Dr. Lúcio Fabio Pereira da Silva**[2]

[1,2]Universidade Federal do Amazonas, Manaus, AM, Brasil

[1,2]Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia – ICET, Itacoatiara, AM, Brasil

[1]Estudante do curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física, da UFAM, Itacoatiara, AM, Brasil

*Email do autor principal: victorgrana10101998@gmail.com

Resumo: Com o interesse em estimular a divulgação científica relacionada à Mecânica Quântica Relativística, o presente trabalho traz os resultados do estudo do programa institucional de bolsa de iniciação científica, o PIBIC, que tem como objetivo o estudo da equação de Klein-Gordon e sua divulgação entre professores em formação. Para tornar a pesquisa viável, apresentamos uma revisão da literatura, considerando a aplicação da equação, seus aspectos históricos e suas limitações. Na etapa seguinte, abordamos conteúdos específicos da mecânica quântica e da relatividade, como energia e momento relativísticos, notação relativística e equação de Schrödinger. Ainda discutimos a teoria de Klein-Gordon na Teoria Quântica de Campos. Por fim, buscamos entender a aplicabilidade de Klein-Gordon por meio do Paradoxo de Klein.

Palavras-chave: Teoria Quântica Relativística; Equação de Klein-Gordon; Divulgação Científica

Abstract: With the aim of promoting scientific dissemination related to Relativistic Quantum Mechanics, this study presents the results of the institutional program of scientific initiation scholarship, PIBIC, which focuses on the study of the Klein-Gordon equation and its dissemination among prospective teachers. In order to make this research viable, we provide a literature review considering the applicability of the equation, its historical aspects, and its limitations. In the subsequent stage, we delve into specific topics of quantum mechanics and relativity, such as relativistic energy and momentum, relativistic notation, and the Schrödinger equation. Furthermore, we discuss the Klein-Gordon theory within the framework of Quantum Field Theory. Lastly, we aim to comprehend the applicability of Klein-Gordon through the Klein Paradox.

Keywords: Relativistic Quantum Mechanics; Klein-Gordon Equation; Scientific Dissemination

Introdução

Em 1687, o físico Isaac Newton (1643-1727) publica a sua obra intitulada "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" no qual ele enunciou um conjunto de três leis essenciais que descrevem todos os fenômenos da mecânica. Por meio dessa teoria, por exemplo, era possível determinar a velocidade de um objeto sabendo a sua localização no espaço. Além disso, espaço e o tempo eram tratados como absolutos, isto é, a distância e tempo medido a partir diferentes referências deveriam concordar com os mesmos resultados. Apesar da mecânica Newtoniana descrever muito bem as situações macroscópica, no entanto, ela falhava no limite de altas velocidades próximas a luz, assim como também não poderia explicar as interações entre os constituintes elementares da matéria.

Por causa dessa necessidade, a teoria da relatividade restrita surgiu no final do século XIX e início XX através do estudo do físico Albert Einstein (1879-1955) no qual revolucionou a nossa compreensão acerca da noção de espaço e tempo, uma vez que esses conceitos passaram a ser abordados não mais como absolutos, mas sim como grandezas relativas que não devem ser tratadas de forma isolada uma da outra. Nesse sentido, a relatividade de Einstein é uma extensão da mecânica de Newtoniana.

Mais tarde, entre os anos de 1920 e 1930, surge o desenvolvimento de uma nova teoria, embora esta já vinha sendo desenvolvida a partir do ano de 1900 com o trabalho de Max Planck (1858-1947) sobre a radiação do corpo negro. Essa nova teoria trata-se da mecânica quântica que nos permitiu compreender aqueles fenômenos que não poderiam ser explicados pela física clássica em escalas subatômicas.

Apesar dessas duas teorias surgirem com a tentativa de explicar fenômenos que jamais seriam explicados pela teoria clássica da época, uma delas não era compatível com outra, ou melhor, a teoria quântica não era compatível com teoria da relatividade, pois a primeira não ocorre para velocidades próximas a da luz no vácuo. Dessa forma, o fato de existir uma velocidade limitante na natureza tem como consequência um limite para a descrição de fenômenos quânticos, principalmente em determinar com exatidão a medida e a posição de um objeto. [1].

Embora essas duas teorias contribuírem de forma marcante para a física moderna em diferentes campos de atuação, os físicos Oskar Klein (1894-1977) e Walter Gordon (1893-1939) elaboraram uma expressão matemática denominada "Equação de Klein-Gordon" que generaliza a equação de Schroedinger na tentativa de unir tanto a mecânica quântica quanto a relatividade.

Devido a necessidade de temas como este serem a tratados apenas em cursos de pós-graduação, este trabalho apresenta os resultados finais do projeto de pesquisa que tem como título "Estudo e Divulgação da Mecânica Quântica Relativística da Equação de Klein-Gordon a Nível de Graduação". Neste trabalho, apresentamos os aspectos históricos para a construção da Equação de Klein-Gordon, assim como introduzimos conceitos fundamentais que permitem o desenvolvimento da mecânica quântica relativística.

Revisão de Literatura

A teoria quântica relativística conecta a teoria da relatividade de Einstein com os princípios da mecânica quântica de Planck. Essa teoria descreve o comportamento de partículas elementares em altas velocidades próximas à luz e em escalas muito pequenas, ou seja, incorpora os efeitos da mecânica quântica e da relatividade.

No início do século XX, houve um desenvolvimento simultâneo das teorias da relatividade e quântica, resultando em tentativas iniciais de criar uma mecânica ondulatória que levaram a equações de onda relativísticas, [2]

A teoria quântica relativística possui ampla aplicação em diversas áreas da física, incluindo física de alta energia, física de partículas, física de aceleradores, física atômica, química e física da matéria condensada. Esta teoria inovadora representa uma variação local da Relatividade Especial e se estabelece como uma teoria independente, combinando conceitos fundamentais da Relatividade Geral com a perspectiva da Teoria Quântica [3].

A busca por unificar a teoria quântica e a relatividade restrita foi inicialmente proposta por Oskar Klein (1894-1977) e Walter Gordon (1893-1939) em 1926. Eles desenvolveram uma equação de onda relativística que incorpora ambas as teorias. A expansão da mecânica quântica para incluir a relatividade é necessária para descrever fenômenos em altas energias e também para abordar fenômenos em escalas de comprimento próximas às do comprimento de onda de Compton [4].

A generalização da mecânica quântica torna-se necessária em cenários de altas energias como aceleradores de partículas e dimensões espaciais extremamente pequenas, como estudos de partículas subatômicas. Essa abordagem é crucial para obter resultados precisos em situações de alta energia, onde a mecânica quântica tradicional e a relatividade clássica não são suficientes. A mecânica quântica relativística permite explorar fenômenos em escalas muito pequenas e com energias significativas, expandindo nosso entendimento do mundo subatômico.

No trabalho de [1] sobre "uma introdução à mecânica quântica relativística", autora aborda conceitos chave da relatividade restrita e mecânica quântica, com ênfase na equação de onda de Klein-Gordon como ferramenta essencial na descrição de partículas elementares em perspectiva relativística.

A equação de Klein-Gordon é fundamental para a teoria quântica de campos, descrevendo campos de partículas sem spin. No entanto, para partículas com spin 1/2, como elétrons e quarks, a Equação de Dirac é usada devido às limitações da equação de Klein-Gordon.

Enquanto em [5], discute-se o espectro de energia do átomo de hidrogênio. A equação de Klein-Gordon não descreve a estrutura fina do espectro adequadamente; a equação de Dirac é mais apropriada, incorporando interações eletromagnéticas, spin, órbita e interações com o potencial nuclear. Apesar de sua precisão em certos fenômenos, a equação de Klein-Gordon tem limitações, sendo a equação de Dirac introduzida para uma descrição mais completa, resultando em uma nova teoria quântica relativística.

Assim sendo, tanto a equação de Klein-Gordon quanto a equação de Dirac são fundamentais na construção da base da mecânica quântica relativística. Essa teoria é responsável por fornecer a função de onda de uma partícula, permitindo descrever o comportamento de férmios ou bósons em um campo eletromagnético externo [6]

Segundo a teoria da relatividade especial, o espaço-tempo é considerado um conti- nuum no qual os eventos ocorrem. Ao invés de serem tratados como entidades separadas, as coordenadas de espaço e tempo são unificadas em um único sistema de coordenadas, onde o espaço e o tempo estão intrinsecamente relacionados.

No trabalho [7], é abordada a equação de Klein-Gordon em sua forma generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker, com uma associação específica ao grupo de Fantappié-de Sitte. Nesse contexto, a equação de onda relativística é obtida a partir do operador Casimir de segunda ordem associado a esse grupo.

[8] explora EKG unidimensional com estrutura Lorentz, abordando potenciais vetoriais e escalares; estuda soluções para espalhamento de partículas em potencial degrau com acoplamento misto, crucial para o entender tunelamento quântico, onde partículas superam barreiras com energia inferior, com aplicações em eletrônica quântica e fusão nuclear.

A equação KG (Klein-Gordon) é precisa, mas desafia interpretação da probabilidade, devido a densidade de probabilidade indefinida permitindo valores positivos e negativos. [9] resolveram ao reinterpretar KG na teoria quântica de campos, onde formalismo de campo supera ambiguidades, fornecendo base sólida para descrever partículas e interações em conformidade com relatividade restrita, esclarecendo interpretação da probabilidade e integrando-a à teoria quântica de campos

Metodologia

O propósito deste estudo foi conduzir uma abordagem exploratória e fundamentada em fontes bibliográficas sobre o tópico em questão, bem como promover a divulgação deste estudo na comunidade acadêmica. Conforme mencionado por [10], a pesquisa bibliográfica envolve uma sequência organizada de procedimentos de busca por soluções, concentrada no objeto de estudo, e, portanto, não deve ser realizada de maneira arbitrária. Ao longo do desenvolvimento deste projeto, diversos recursos foram examinados, incluindo artigos científicos, livros, sites, blogs e outros, com o intuito de obter uma compreensão mais aprofundada do tema.

De acordo com [11], a pesquisa exploratória visa principalmente desenvolver uma maior familiaridade com o problema, tornando-o mais claro ou gerando hipóteses. Dessa forma, procuramos estabelecer uma conexão mais próxima com o tópico para melhor entendê-lo.

Além disso, dado o caráter de divulgação científica deste material, foram conduzidas apresentações para a comunidade acadêmica do Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET), particularmente para estudantes e professores da áreas exatas.

Para embasar nosso conhecimento sobre o assunto deste trabalho, foi crucial obter uma compreensão geral da teoria da relatividade e da mecânica quântica. Por esse motivo, participamos de um curso de Física Moderna, no qual exploramos inicialmente a Relatividade e, em seguida, uma parte da Mecânica Quântica.

O processo de construção do conhecimento passou por diversas etapas, envolvendo uma abordagem metodológica. Inicialmente, coletamos informações relevantes e, em seguida, organizamos essas informações. A metodologia não é vista aqui como uma entidade isolada, mas sim como um procedimento logicamente estruturado e necessário para a edificação do conhecimento. Conforme indicado por [12], a metodologia é fundamentada na lógica, racionalidade, eficiência e eficácia, orientando as decisões cruciais durante a pesquisa.

Além de compreender a visão panorâmica das duas teorias, outra fase deste estudo envolveu a introdução do formalismo da equação de Klein-Gordon da mecânica quântica relativística. Nessa etapa, fornecemos as ferramentas matemáticas essenciais para a formulação dessa equação e para a compreensão de seu significado no contexto da física quântica relativística. Além disso, uma variedade de recursos foi obtida em fontes acadêmicas, como o "Google Acadêmico", com a finalidade de explorar e incorporar a narrativa histórica por trás da equação de onda relativística de Klein-Gordon em nosso material.

Desenvolvimento e Resultados

Energia e Momento Relativístico

Uma das equações mais interessantes e fundamentais da relatividade que recebeu ampla aceitação pela comunidade científica é a famosa relação de equivalência entre massa e energia, $E = m^2c^4$, onde m corresponde a massa de uma partícula medida a partir do sistema de coordenada S. Ela também é conhecida como massa de repouso. Classicamente, esta massa é uma constante, no entanto, para altas velocidade próximas da luz ela pode variar. De acordo com [13], a massa varia com a velocidade de acordo com a lei

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda m_0 \tag{1}$$

Na mecânica newtonina, a massa de repouso m_o é a medida da inércia de um objeto que não depende da velocidade v. Todo objeto que esteja com velocidade v, adquire um certo momento linear que pode ser expresso por $p = m_o v$. Pelo Príncipio da Relatividade, a lei de conservação do momento deve ser satisfeita sob transformação de Lorentz. Isso deve ocorre quando o momento relativístico for escrito como

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\boxed{m_o}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot v = m\mathbf{v} \tag{2}$$

De modo que ele seja invariante em qualquer sistema de coordenada inercias. O momento relativístico descreve a quantidade de movimento de uma partícula em termos da sua massa, velocidade e fator de Lorentz. Diferente do momento clássico, o momento relativístico leva em conta os efeitos da relatividade especial, especialmente em altas velocidades próximas à velocidade da luz. Essa formulação é essencial para descrever com precisão o comportamento das partículas em um contexto relativístico.

Classicamente, a energia cinética, em termos do momento, pode ser representada por $E_c = P^2/2m$. No entanto, pelo Princípio da Relatividade, a massa é uma quantidade variante, sendo assim, a energia cinética é modificado. Assim, segundo [14], pode-se mostrar que

$$E_c = mc^2 - m_o c^2$$

$$E_c = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \tag{3}$$

Onde o termo mc^2 representa a energia total da partícula. Esta descoberta também pode ser reduzida em $E_c = (m - m_0)\ c^2$, diminuindo que a energia cinética da partícula está relacionada com a variação de sua velocidade e massa.

Dado que o momento linear p de uma partícula é uma grandeza que descreve a quantidade de momento desta, a qual está intimamente relacionada com a definição de força e energia, então é conveniente expressar a energia da partícula em termos do seu momento. Na relatividade, a expressão que conecta a energia total da partícula com seu momento é definida como:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{4}$$

Também conhecida como energia relativística

Notação Relativística

Nesta seção, é fundamental a introdução de conceitos essenciais da relatividade restrita, uma vez que a equação de onda relativística de Klein-Gordon pode ser expressa em termos de um quadrivetor. Portanto, vamos apresentar um conjunto de quatro coordenadas que parametrizam o espaço-tempo sem forças inerciais, sendo estas:

$$\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \tag{5}$$

A equação básica da relatividade restrita a qual é invariante para diferentes referenciais inérciais é escrita como:

$$ds^2 = c^2 d^2 t - |r|$$

$$ds^2 = c^2 d^2 t - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{6}$$

[15] define o tensor métrico em quatro dimensões em um quadro inércial com μ e ν variando de 0 a 3

$$g^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} g^0_0 & g^1_0 & g^2_0 & g^3_0 \\ g^0_1 & g^1_1 & g^2_1 & g^3_1 \\ g^0_2 & g^1_2 & g^2_2 & g^3_2 \\ g^0_3 & g^1_3 & g^2_3 & g^3_3 \end{pmatrix}$$

$$g^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Isso é conhecida como métrica de Minkowski em homenagem ao matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909). A métrica de Minkowski é uma importante definição na física que caracteriza o espaço-tempo em um espaço de Minkowski [16, 17]. Esse espaço é essencial para a teoria da relatividade especial e possui propriedades distintas que influenciam a descrição dos eventos na presença da gravidade.

Note que a medida do vetor $\mathbf{dx} = dx^{\mu}$ pode ser escrito como $ds^2 = dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ A forma convariante de um tensor métrico, segundo [15] é expresso como:

$$g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para a métrica de Lorentz, os tensores covariante e contravariante são iguais, ou seja, $g^{\mu}_{\nu} = g^{\nu}_{\mu}$. Vamos também introduzir o quadrivetor contravariante e covariante, respectivamente:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{8}$$

$$x_{\mu} = (x_, -x_1, -x_2, -x_3) = (ct, x, y, z) \tag{9}$$

Para transformar um quadrivetor contravariante em covariante ou vice-versa, basta utilizar o tensor métrico. O tensor métrico permite a elevação ou abaixamento dos índices dos componentes do quadrivetor, de acordo com a seguinte relação:

$$x^{\mu} = g^{\mu}_{\nu}x^{\nu} \tag{10}$$

$$x_{\mu} = g^{\nu}_{\mu}x^{\mu} \tag{11}$$

Onde x^{μ} é o vetor contracovariante e x_{μ} sendo o quadrivetor covariante. Dadas a coordenadas contracovariante e covariante podemos, definir o contragradiente e o cogradiente, respectivamente, adotando c=1:

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \\ \partial_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Com isso, temos condições de construir o operador quadrático invariante de lorentz:

$$\square = \partial^2 = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{13}$$

Onde isso é familiar, pois é conhecido como d'Alambertiano. Este é uma gerenalização do Laplaciano no espaço de Minkowski. Além disso, podemos escrever o quadrivetor momento como:

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \\ p_{\mu} &= \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

De forma que, dado o quadrivetor momento, podemos construir o escalar de Lorentz:

$$p^2 = p^{\mu}p_{\mu} = E^2 - \mathbf{p}^2 \tag{15}$$

Como já sabemos que as representações de coordenada dos operadores energia e momento assumem a forma:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\hbar\nabla \end{aligned} \tag{16}$$

Sendo assim, podemos combina-los para escrever a representação de coordenadas para o operador quadrivetor momento como:

$$p^{\mu} = i\hbar\partial^{\mu} \tag{17}$$

$$p_{\mu} = i\hbar\partial_{\mu} \tag{18}$$

Equação de Schrödinger

A Teoria da Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica são dois dos pilares fundamentais da física moderna, e cada uma delas revolucionou nossa compreensão do universo em escalas diferentes. Enquanto a primeira é uma extensão da mecânica newtoninapara velocidades próximas da luz, a última descreve partículas em escalas muito pequenas tais como elétrons, prontos etc.. Historicamente, a Mecânica Quântica teve seu início no do século XX, quando os físicos estavam lutando para explicar os fenômenos observados em escalas microscópicas, como o comportamento de partículas subatômicas. Max Planck, em 1900, introduziu o conceito de quantização da energia, que levou à ideia de que a energia é emitida ou absorvida em quantidades discretas, chamadas de "quanta". Matematicamente esta energia é expressa como:

$$E = h\nu \tag{19}$$

Com base no estudo de Planck, Albert Einstein conseguiu realizar a explicação do efeito fotoelétrico em 1905. Sua ideia sustentou que a luz é composta por unidades discretas de energia chamadas fótons, reforçando a noção de quantização de energia que Planck havia introduzido. Dado que o campo da mecânica quântica abrange uma vasta extensão, nesta seção, concentraremos nossa atenção apenas na equação de Schrödinger. Partiremos do conceito de onda de matéria proposto por Louis de Broglie (1892-1987). Ele sugeriu que a luz pode possuir uma natureza dual, ora se comportando como uma onda e ora como uma partícula. Segundo ele, uma partícula de massa m que se move com velocidade v é caracterizada por

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{20}$$

onde p é o momento linear da partícula.

Embora tal proposta parecesse contraintuitiva, a hipótese de de Broglie estava de acordo com a condição de quantização do momento angular proposta por Bohr. Em poucos anos após a apresentação dessa hipótese, ela foi validada experimentalmente, levando à concessão do Prêmio Nobel de 1929 a de Broglie.

Com isso, Erwin Schrödinger (1887-1961) formulou uma equação de onda que descrevesse o comportamento de sistema quântico, isto é, partículas subatômicas tais como átomos e moléculas em escalas microscópicas. A equação de Schrodinger em uma direção é dada por:

$$\Longrightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}} \tag{21}$$

Esta é conhecida como equação de Schrödinger unidimensional dependente do tempo para uma partícula livre. Ela possui derivada de segunda ordem no espaço e derivada de primeira ordem no tempo, o que não permite está de acordo com os princípios da relatividade restrita, dado que não é invariante sob transformação de Lorentz.

Breve Histórico da Equação de Klein-Gordon

Por volta do século XX, grandes cientista como Max Planck, Albert Einstein , De Broglie

, Niels Bohr , Erwin Schrödinger , Heisenberg e outros elaboraram uma descoberta altamente bem-sucedida no mundo da física. Esse período testemunhou a emergência de uma época na qual inúmeros fenômenos físicos desafiavam as explicações proporcionadas pelas já estabelecidas leis físicas, tais como as elaboradas por Newton e Maxwell. Exemplos desses fenômenos incluem o efeito fotoelétrico, a radiação do corpo negro, entre outros. Grandes cientistas estão se esforçando para explicar esses fenômenos, até que surgiu uma nova teoria conhecida como Mecânica Quântica .

A Mecânica Quântica é uma teoria que desempenha um excelente papel ao explicar esses fenômenos, de modo que a teoria pode modelar o átomo combinando os resultados experimentais. Além disso, quando combinada com as ideias de Einstein sobre a relatividade restrita, a Mecânica Quântica pode nos ajudar a entender coisas pequenas que se movem bem rápido, como dentro do núcleo dos átomos ou nas partículas em escalas muito pequenas. Quando juntamos essas duas teorias, conseguimos algo chamado Mecânica Quântica Relativística. Uma das primeiras equação de onda dessa teoria é conhecida como Equação de Klein-Gordon.

Em 1926, vários físicos, entre eles Klein, Fock, Schrödinger e de Broglie, anunciaram essa equação como candidata a uma generalização relativística da equação usual de Schrödinger. Na maioria das primeiras versões, a equação de Klein-Gordon estava conectada com a teoria geral da relatividade. Klein e alguns outros físicos tentaram expressar a mecânica quântica dentro de uma teoria unificada de cinco dimensões, abraçando a relatividade geral, bem como a eletrodinâmica. Embora essa tentativa ambiciosa tenha atraído algum interesse em 1926, seu impacto no desenvolvimento da mecânica quântica foi praticamente nulo. [18]

A equação da mecânica quântica relativística é chamada de equação de Klein-Gordon, em homenagem a dois físicos, a saber, Oskar Klein e Walter Gordon, que em 1926 tentaram explicar as partículas de elétrons com a abordagem da relatividade especial. Infelizmente, como o elétron tem Spin ½, os resultados não são satisfatórios para explicar o elétron. No entanto, a equação de Klein-Gordon pode ser explicada muito bem para pedaços de partículas (sem Spin) e outras partículas que possuem Spins inteiros (0, 1, 2, . . .). Algumas partículas, como os "píons", que são feitas de outras partículas menores (ainda estamos descobrindo quais são essas partículas menores), têm "spin" zero. Mas para entender partículas com "spin", como os elétrons, é melhor usar uma equação diferente, chamada Equação de Dirac. [18]

A equação de Klein-Gordon foi considerada pela primeira vez por Schrödinger em busca da equação para a dualidade onda-partícula de de Broglie. As equações foram encontradas em suas anotações por volta do ano de 1925. Ele montou a equação para explicar o átomo de hidrogênio . Infelizmente, a equação de Klein-Gordon falha em explicar a estrutura fina do espectro do átomo de hidrogênio. Os níveis de energia não são produzidos de acordo com o modelo atômico de Bohr e Sommerfeld, que é o melhor na época. Em janeiro de 1926, Schrödinger substitui a equação de Klein-Gordon por uma equação não relativística, que agora é conhecida como equação de Schrödinger , para descrever o átomo de hidrogênio com uma abordagem não relativística. A equação descreve com sucesso o nível de energia em átomos de hidrogênio atômico de Bohr sem considerar a estrutura fina. A equação de Schrödinger torna-se fenomenal no caso da mecânica quântica não relativística.

A teoria física correta deve satisfazer o princípio da relatividade , ou seja, se uma lei da física é verdadeira para um determinado sistema inercial, então a equação também deve ser verdadeira para todos os outros sistemas inerciais. Além disso, as partículas no tamanho quântico são relativamente pequenas, o que obviamente tem uma velocidade próxima à da luz. Portanto, a equação quântica deve estar de acordo com a teoria da relatividade restrita de Einstein.

Para se adequar à teoria da relatividade, essas equações devem satisfazer a transformação de Lorentz . Infelizmente, a equação de Schrödinger só é invariante com a transformação de Galileu(Newtoniana) e não são invariantes à transformação de Lorentz (Relatividade). Porque desde o início da equação de Schrödinger usando abordagem não relativística, de modo que a teoria da relatividade de Einstein não foi cumprida na equação. Assim, devemos encontrar uma equação quântica que satisfaça a teoria da relatividade restrita de Einstein.

Em 1926, logo após Schrödinger, Fock generalizou a equação de Schrodinger em um artigo para o caso de um campo magnético que seu estilo depende da velocidade e baixou independentemente da equação de Klein-Gordon. Enquanto isso, Klein e Gordon tiveram que escrever um artigo que obtivesse a mesma equação. Com a contribuição de Fock, a equação de Klein-Gordon é muitas vezes referida como a equação de Klein-Fock-Gordon. Graças aos seus esforços, as equações da mecânica quântica relativística para partículas livre tem soluções de ondas planas simples. A equação bem sucedidas a este respeito é a equação de Klein-Gordon para partículas tem Spin inteiro (0, 1, 2, . . .). Além disso, a equação de Dirac descreve com sucesso para partícula tem Spin meio inteiro (1/2, 3/2, 5/2, . . .) [19]

Equação de Klein-Gordon

Diferentemente da equação Schrödinger que utilizou a energia clássica para obter a equação de onda não relativística, os físicos Oskar-Klein Walter-Gordon partiram da energia relativística de Einstein para unificar a relatividade com mecânica quântica

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{22}$$

Onde usaram os operadores quânticos, energia $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e momento $p = -i\hbar\nabla$, de modo que a partir de uma manipulação algébrica chegaram na equação matemática.

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla\psi + \frac{mc^2}{\hbar^2}\psi = 0} \tag{23}$$

Tal equação é conhecida como equação de Klein-Gordon, em homenagem aos físicos Oskar Klein e Walter Gordon. Esta foi a primeira tentativa de unificar a relatividade restrita com a teoria quântica, considerando a descrição de elétrons em altas velocidades próximas da luz.

Vamos considerar uma função de onda plana que se propaga ao longo do eixo x

$$\psi(x,t) \; = \; Ae^{i(kx-wt)}$$

Escrita em termos do momento p e da energia E:

$$\psi(x,t) \; = \; Ae^{\frac{i}{\hbar}\,(\mathbf{p}x-Et)} \tag{24}$$

Usando esta expressão na equação de Klein-Gordon (10) temos como resultados:

$$\boxed{E^2 = \; \pm(p^2c^2+m^2c^4\;)^{\frac{1}{2}}} \tag{25}$$

Isso revela uma característica intrigante da equação de Klein-Gordon, ao admitir a existência de energias tanto positivas quanto negativas. Este resultado contraria as expectativas iniciais guiadas pela interpretação da mecânica quântica, pois aparentemente sugere a presença de uma infinidade de níveis de energia negativa. Embora a presença de soluções com energia negativa possa parecer contraditória, visto que estamos acostumados a pensar em energia como algo sempre positivo e associado a estados estáveis. No entanto, na teoria quântica de campos, as partículas não são tratadas como entidades pontuais e discretas, mas simm como excitações do campo que podem possuir diferentes quantidades de energia. A presença de soluções de energia negativa na equação de Klein-Gordon indica a possibilidade de estados que não se comportam de acordo com a nossa intuição clássica.

Uma interpretação física desse fenômeno está relacionada à criação e aniquilação de pares partícula e antipartícula. A teoria quântica de campos permite que partículas virtuais, que normalmente não são observáveis diretamente, possam temporariamente existir e influenciar o comportamento do campo. Essas partículas virtuais podem ter energia negativa, mas sua existência é efêmera e está associada à incerteza intrínseca da teoria quântica. Sendo assim, o surgimento de energia negativa na equação de Klein-Gordon é um lembrete da natureza complexa e não intuitiva do mundo quântico, onde os conceitos familiares da física clássica muitas vezes precisam ser reconsidera dos e reinterpretados à luz das regras quânticas.

Dado que a solução da equação de KG nos fornece valores negativos para a energia, então faz-se necessário analisar o significado da função de onda $\psi(x,t)$. Na mecânica quântica, a definição de encontrar uma partícula em uma determinada região não é expressa da mesma forma que na física clássica. Na mecânica quântica, a localização de uma partícula é descrita pela função de onda, que é uma distribuição de probabilidade no espaço. A probabilidade de encontrar a partícula em uma região específica é dada pelo quadrado do módulo da função de onda [20]:

$$P(x) = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx \tag{26}$$

Onde $\rho(x,t) = \psi(x,t)\psi(x,t)^*$ é a densidade de probabilidade que, a princípio, é uma quantidade positiva. Este conceito de densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ está intimamente relacionado a corrente de densidade de probabilidade $j(\mathbf{r},t)$ por meio da equação de continuidade

$$\frac{\partial^2\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \nabla\cdot J(\mathbf{r},t) = 0 \tag{27}$$

Esta relação matemática é conhecida como a lei de conservação no limite não relativístico a qual expressa que a variação da quantidade de densidade de probabilidade ρ em um volume é igual ao fluxo da densidade de corrente J saindo deste volume. Esta lei na sua forma relativística é determinada quando encontramos ρ e J no limite relativístico.

Estas quantidades podem ser obtidas a partir da equação de Klein-Gorodn (23) e seu complexo conjulgado. Multiplicando-as pela esquerda por ψ^* e ψ, respectivamente, e subtraindo chegamos em:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2m_o c}\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}\psi^*\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\psi\psi^*\right)\right] + \nabla\cdot\left[\frac{i\hbar}{2m_o}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)\right] = 0 \quad (28)$$

Sendo assim, obtemos as quantidades relativística da densidade de probabilidade ρ e corrente de probabilidade J, respectivamente:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \left[\frac{i\hbar}{2m_o c}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial(ct)}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial(tc)}\psi^*\right)\right] \quad (29)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \left[\frac{i\hbar}{2m_o}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)\right] \quad (30)$$

Depois de chegarmos na equação da continuidade na sua forma relativística seria conveniente propor uma interpretação para ρ como densidade de probabilidade, no entando, $\psi(\mathbf{r},t)$ e $\partial\psi(\mathbf{r},t)/\partial t$ podem ter valores variados para um dado tempo t de forma que (30) pode assumir valores tanto positivos quanto negativos. Sabemos que ρ é uma quantidade que não é arbitrariamente positiva e, por causa disso, não pode ser interpretada como densidade de probabilidade. Isso reside no fato de que a equação de Klein-Gordon possui derivada de segunda ordem no tempo.

Embora não conseguimos fornecer uma interpretação adequada de densidade de probabilidade para ρ e J, no entando, se assumirmos as expressões (29) e (30) multiplicada pelo valor da carga elementar e, conseguimos entende-las como densidade de carga $\bar{\rho}$ e densidade de corrente de carga $\bar{J}$, respectivamente:

$$\bar{\rho}(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar}{2m_o c}\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial(ct)}\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r},t)\right) \quad (31)$$

$$\bar{J}(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar}{2m_o}\left(\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^*(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right) \quad (32)$$

Assim, $\bar{\rho}$ pode ter valores postivo, negativo e nulo de tal forma que esteja de acordo com a possibilidade do surgimento de partículas e antipartículas. Isso fica claro quando analisamos a energia de uma partícula livre dada pela equação (25). Com isso, temos duas soluções possíveis para uma partícula com momento p, sendo que uma para energia positiva e outro pra energia negativa. Dessa forma, a função de onda poderá adimitir esse dois valores de energia, como segue abaixo:

$$\psi_\pm(\mathbf{r},t) = A_\pm e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr}-|E|t)} \quad (33)$$

Onde $A_\pm$ é conhecido como constante de normalização. Se tomarmos a derivada temporal da equação (33) e substituirmos em (31) temos como resultados:

$$\bar{\rho}(\mathbf{r},t) = \pm\frac{i\hbar e}{2m_o c}\frac{i|E|}{\hbar}\psi^*_\pm(\mathbf{r},t)\psi_\pm(\mathbf{r},t) \quad (34)$$

Com a expressão (34) em mãos, então isso nos ajuda compreender que $\psi_{+}(\mathbf{r},t)$ indica partículas com massa m_o e com carga positiva +e, enquanto $\psi_{-}(\mathbf{r},t)$ indica partícula com mesma massa, mas com carga oposta -e

A TGK na Teoria Quântica de Campos

Física Moderna seguiu dois caminhos principais: a Relatividade e a Mecânica Quântica. Ambas áreas continuam sendo desafiadoras e complexas até hoje. A Relatividade trata de partículas com muita energia em movimento, frequentemente a velocidades bem maiores do que estamos acostumados. Isso traz efeitos únicos e muda as formas como as coisas se movem e mudam. Por outro lado, a Mecânica Quântica explora o mundo atômico e subatômico, utilizando leis estranhas que, embora não compreendidas completamente, apresentam notável concordância experimental. Entre essas descrições, surge a questão das partículas regidas por energias convencionais e não convencionais. No entanto, a Mecânica Quântica de Schrödinger é limitada em lidar com partículas que se aproximam da velocidade da luz, como os raios cósmicos que constantemente penetram nossa atmosfera. Para abordar esse desafio da relatividade, uma nova formulação da Mecânica Quântica foi desenvolvida por volta do meio do século XX, principalmente por meio dos trabalhos de Klein-Gordon e Dirac. Essa abordagem ofereceu uma perspectiva que conseguia conciliar as demandas da relatividade com os princípios quânticos, permitindo uma compree- nsão mais completa e coerente do comportamento das partículas em altas energias e velocidades. Klein-Gordon abordaram a temática de uma fauna de partículas de altas energias e tentaram descrever qual equação seria capaz de reger sua dinâmica/evolução. Na vitrine dos acontecimentos, obtiveram uma lei de movimento a luz da equação de Newton, ou seja, diferenciada da teoria de Schrodinger, na qual a derivada temporal é de segunda ordem. Exatamente por isso, pelo que se sabe hoje, tais resultados ferem a definição positivo definida da probabilidade, o que aos olhos da ciência moderna ainda continua inapropriado. Apesar de todo insucesso, a teoria de Klein-Gordon não foi completamente descartada, pois esta trouxe boas descrições acerca de partículas escalares detentora de spin nulo, ou seja, bósons. Ademais, é largamente estudada no campo de espaços curvos e nas tentativas de descrever modelos que permeiem âmbitos gerais da Mecânica Quântica e gravitação, como modelos de radiação de campo massivo para obtenção de energia radiante atrelada a buracos negros estáticos e sem carga, ou mesmo pesquisas sobre influência gravitacional em efeitos quânticos de um buraco negro rotativo carregado. Diante de tudo, as perspectivas advindas do campo de Klein-Gordon são promissoras, sendo útil em estudos cosmológicos e de gravidade quântica. [21]

A equação de Klein-Gordon ressurge na teoria quântica de campos como uma equação de campo para campos escalares relativísticos. Na teoria quântica de campos, os campos são tratados como operadores que atuam em um espaço de estados quânticos. A equação de campo de Klein-Gordon descreve a evolução temporal dos campos escalares, levando em consideração os princípios da relatividade especial e da mecânica quântica. Essa equação é amplamente usada para descrever partículas de spin zero, como o bóson de Higgs, em contextos relativísticos. Ela incorpora a energia e o momento da partícula, bem como a massa e a derivada segunda no tempo do campo. A teoria quântica de campos exige a quantização dos campos, transformando-os em operadores que obedecem às regras da mecânica quântica. Isso leva à criação e aniquilação de partículas, e a equação de campo de Klein-Gordon governa essa dinâmica para campos escalares. Com isso, a equação de Klein-Gordon reaparece na teoria quântica de campos como a equação fundamental que descreve a dinâmica de campos escalares relativísticos e suas interações com partículas em um cenário de física de alta energia. Ela desempenha um papel central na compreensão das propriedades das partículas elementares e na formulação de teorias de campos na física de partículas

Aplicação da Equação de Klein-Gordon

omo havíamos mencionados nas seções anterioes, a equação de Klein-Gordon possui uma variedades de aplicações na física. Nesta seção, nos limitaremos a falar apenas em uma dessas aplicações. Trata-se do conhecido paradoxo de Klein sobre o espalhamento de uma partícula.

Paradoxo de Klein

Consideremos uma partícula escalar carregada descrita pela equação de Klein-Gordon (23) num campo eletromagnético externo. Lembramos que o acoplamento de uma partícula carregada a um campo eletromagnético é dado pelo acoplamento mínimo:

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu \tag{35}$$

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu \tag{36}$$

Na análise, empregamos a representação de coordenadas para o momento, como mostrado na equação (17), onde A_μ representa o potencial vetorial associado ao campo eletromagnético. Consequentemente, nesse contexto, a partícula escalar será governada pela equação minimamente acoplada de Klein-Gordon (com $e > 0$, indicando que as partículas são selecionadas para possuir carga positiva), conforme discutido em [22].

$$((\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA_\mu) + m^2)\psi(x) \tag{37}$$

Como resultado a densidade de corrente de probabilidade em (32) pode ser determinada para ter a forma:

$$\mathbf{j}^\mu = \frac{i}{2m}\left(\psi^*(x)\partial^\mu\psi(x) + 2ieA^\mu\psi^*(x)\psi(x)\right) \tag{38}$$

Onde definimos

$$A\partial^\mu = A(\partial^\mu B) - (\partial^\mu A)B \tag{39}$$

A partir dessa descrição geral, podemos considerar o espalhamento de partículas escalares carregadas de Klein-Gordon com energia positiva de potencial eletrostático constante. Neste caso, portanto, temos:

$$\mathbf{A} = 0 \qquad A^0 = V_o = constante \tag{40}$$

Pra simplificar vamos supor que o potencial elletróstática seja constante na forma

$$V = \begin{cases} 0, & \text{para } z < 0 \\ V_0, & \text{para } z > 0 \end{cases} \tag{41}$$

E assumindo que a partícula é incidente no potencial ao longo o eixo z, conforme mestrado na figura abaixo:

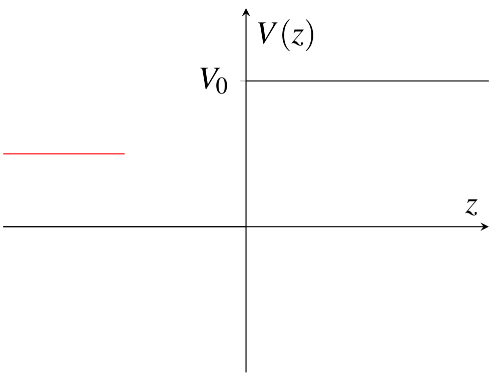

Figure 1 – Espalhamento de uma partícula em potencial degrau.

As equações da dinâmica serão diferentes nas duas regiôes, ou seja, para $z < 0$ (região I) e $z > 0$ (região II), e terão as formas (37)

$$\begin{aligned} \left(\square - m^2\right) \psi_I(x) = 0 \quad &\text{(Região I)} \\ \left(\square - m^2 + 2iV_0 \frac{\partial}{\partial t} - e^2 V_0^2\right) \psi_{II}(x) = 0 \quad &\text{(Região II)} \end{aligned} \tag{42}$$

Na região I temos uma onda incidente com energia positiva e outra onda refletida com energia negativa, assim podemos escrever:

$$\psi_I(z) = Ae^{i(\mathbf{p}z - Et)} + Ae^{-i(\mathbf{p}z - Et)} \quad (\text{para } z < 0) \tag{43}$$

Já na região II temos apenas ondas transmitidas de modo que:

$$\psi_{II}(z) = Be^{i(p'z - Et)} \quad text(\text{para } z > 0) \tag{44}$$

Onde A e B são conhecidos como coeficientes de reflexão e de transmissão, resspectivamente. Observamos que a continuidade da função na fronteira, ou seja, em $z = 0$ requer que as energia sejam as mesma nas duas regiões.

Para que as funções (43) e (44) satisfaçam as respectivas equações (42), devemos ter:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p^2 + m^2} \\ p' &= \sqrt{(E - eV_0)^2 - m^2} \\ p' &= \sqrt{(E - eV_0 + m)(E - eV_0) - m} \end{aligned} \tag{45}$$

Utilizamos o fato de que a energia da partícula incidente é positiva. Portanto, a raiz quadrada da primeira equação em (45) possui um sinal positivo. Entretanto, o sinal negativo da raiz quadrada na segunda relação ainda requer correção.

Observamos, a partir da segunda relação em (45), que p' é um valor real tanto para $E - eV_0 > m$ (potencial fraco) quanto para $E - eV_0 < m$ (potencial forte). Contudo, ao considerarmos um potencial de intensidade intermediária que satisfaz $-m < E - eV_0 < m$, notamos que p' se torna puramente imaginário. Isso implica que o comportamento da onda transmitida é influenciado pela força do potencial.

Como consequência, neste último caso, há uma série de considerações a serem feitas.

$$p' = i|p'| \qquad -m < E - eV_o < m \tag{46}$$

para que a função de onda seja amortecida na região II. Para determinar o sinal da raiz quadrada nos casos em que p' é real, observemos pela segunda relação em (45) que a velocidade de grupo da onda transmitida pode ser obtida como:

$$\Longrightarrow p'^2 = (E - eV_0)^2 - m^2$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial (p')^2}{\partial p'} = \frac{\partial}{\partial p'}\left[(E - eV_0)^2 - m^2\right]$$

$$\Longrightarrow 2p' = 2(E - eV_0)\frac{\partial E}{\partial p'}$$

Onde a velocidade de grupo é dado por:

$$v_{group} = \frac{\partial E}{\partial p'} = \frac{p'}{(E - eV_0)} \tag{47}$$

Como esperamos que a onda transmitida se desloque para a direira, determinamos a partir da equação (47)

$$\begin{aligned} p > 0, \quad para \quad E - eV_o > 0 \\ p < 0, \quad para \quad E - eV_o < 0 \end{aligned} \tag{48}$$

Isto, portanto, fixa o sinal da raiz quadrada na segunda relação em (45) para vários casos.

Combinando as funções de onda em (43) e (44) impondo as condições de continuidade para $z = 0$

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \end{aligned} \tag{49}$$

De forma que tem-se:

$$\boxed{1 + A = B} \tag{50}$$

$$\boxed{A - 1 = \frac{p'}{p}B} \tag{51}$$

Combinando (50) e (51) determinamos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{p + p'}{p - p'} \\ B &= \frac{2p}{p + p'} \end{aligned} \tag{52}$$

Iremos determinar as densidades de corrente probabilística associadas às diferentes ondas.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{inc} &= z \cdot \mathbf{J}_{inc} = \frac{p}{m} \\ \mathbf{J}_{ref} &= -z \cdot \mathbf{J}_{ref} = \frac{p}{m}\frac{(p - p')(p - (p')^*)}{(p + p')(p + (p')^*)} \\ \mathbf{J}_{trans} &= z \cdot \mathbf{J}_{trans} = \frac{(p + (p')^*)}{2m}\frac{2p^2}{(p + p')(p + (p')^*)} \end{aligned} \tag{53}$$

onde usamos (52), bem como o fato de que, embora p seja real e positivo, p' pode ser positivo ou negativo ou mesmo imaginário dependendo da força do potencial ver (46) e (48). Podemos agora determinar os coeficientes de reflexão e de transmissão simplesmente como

$$\begin{aligned} R &= \frac{J_{ref}}{J_{inc}} = \frac{(p - p')(p - (p')^*)}{(p + p')(p + (p')^*)} \\ T &= \frac{J_{tran}}{J_{inc}} = \frac{2(p + (p')^*)}{(p + p')(p + (p')^*)} \end{aligned} \tag{54}$$

Notamos pela reflexão e pelos coeficientes de transmissão que:

$$R + T = \frac{(p - p')(p - (p')^*) + 2(p + (p')^*)}{(p + p')(p + (p')^*)} = 1 \tag{55}$$

de modo que a reflexão e os coeficientes de transmissão satisfaçam unitariamente capacidade para todos os pontos fortes do potencial. No entanto, vamos agora analisar os diferentes casos das forças potenciais individualmente. Primeiro, para o caso $E - eV_o > m$ (potencial fraco), vemos que p' é real e positivo e temos

$$
\begin{aligned}
R &= \left(\frac{p-p'}{p+p'}\right) < 1 \\
T &= \left(\frac{2pp'}{p+p'}\right) > 0 \\
T+R &= 1
\end{aligned} \tag{56}
$$

o que corresponde ao cenário normal em dispersão. Para caso de uma resistência potencial intermédiaria, $-m < E - eV_o < m$, notamos em (45) que p' é puramente imaginário neste caso. Como resultado, segue de (54) que

$$
\begin{aligned}
R &= \left(\frac{p+|p'|}{p-|p'|}\right)^2 > 1 \\
T &= -\frac{4p|p'|}{(p-|p'|)^2} < 0 \\
T+R &= 1
\end{aligned} \tag{57}
$$

Em outras palavras, embora a conservação da probabilidade seja mantida, nesse cenário o coeficiente de transmissão apresenta um valor negativo, enquanto o coeficiente de reflexão ultrapassa a unidade. Isso é conhecido como o paradoxo de Klein, desafiando nossa intuição sobre o espalhamento de partículas estudado na mecânica não-relativística. No entanto, ao expandirmos nossa descrição além de uma única partícula e considerarmos que um potencial eletrostático suficientemente intenso pode gerar pares de partícula-antipartícula, o paradoxo se desfaz [22] .

Nesse contexto, as partículas são atraídas para a barreira, resultando em uma corrente carregada negativamente que flui na direção positiva (lembrando que as partículas são escolhidas para portar carga positiva, enquanto as antipartículas carregam carga negativa). Isso explica o coeficiente de transmissão negativo. Por outro lado, as partículas são refletidas pela barreira e somam-se às partículas incidentes que já foram totalmente refletidas (como já observado em potenciais de força intermediários), resultando em um coeficiente de reflexão que excede a unidade

Considerações Finais

O interesse por este trabalho de estudar e compartilhar a Mecânica Quântica Relativística, com foco na equação de Klein-Gordon, é um passo importante para ampliar nosso conhecimento científico e tornar conceitos avançados da física quântica mais acessíveis a estudantes e professores. Neste trabalho, exploramos os aspectos história e os conceitos fundamentais dessa equação de onda relativistica, que revela o comportamento de partículas elementares em situações relativísticas, indo além da física clássica.

Compreendemos como a equação de Klein-Gordon é útil para descrever partículas com spin zero, como os píons, e enfrentamos desafios interpretativos, como probabilidades negativas. Compartilhar esse conhecimento em níveis de graduação contribui para a formação de professores iniciantes, capacitando-os a ensinar de maneira eficaz a mecânica quântica relativística. Isso é vital para promover a ciência e despertar o interesse pela física em ambientes educacionais diversos.

A finalidade deste material é introduzir e propagar aos estudantes e professores o assunto de mecânica quãntica relativistica sobre a equação de Klein-Gordon. Nele apresentamos de forma detalhada os requisitos necessário para a construção de onda relativísitica. Além disso, discutimos coneceitos importantes como equação de

Schrodinger.

Com este propósito, almejamos que este estudo aprofunde a compreensão dos alunos em relação à equação de Klein-Gordon, suas bases teóricas e aplicações. Além disso, buscamos fomentar a divulgação científica e inspirar novos cientistas a investigar os enigmas do mundo quântico e relativístico. Dessa forma, esperamos ter ilustrado ao leitor as razões pelas quais a matemática é uma ferramenta fundamental na Física, permitindo a exploração de conceitos abstratos e objetos matemáticos que têm interpretações físicas, como o caso das antipartículas

Agradecimentos

Agradecemos a FAPEAM pelo apoio financeiro.

References

1 DIAS, I. P. L. Introdução à mecânica quântica relativística: a equação de klein-gordon. Universidade Federal de São Carlos, 2021.

2 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. [S.l.]: bookman, 2013.

3 IONESCU, L. M. Quantum relativity. *arXiv preprint arXiv:1005.3993*, 2010.

4 CARDOSO, T. R.; CASTRO, A. S. d. Sobre o limiar para a produção de pares e localização de partículas sem spin. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 203–208, 2007.

5 BOURSCHEIDT, L. O espectro de energia do átomo de hidrogênio: um estudo comparativo entre as abordagens não relativística e relativística. 2018.

6 BALDIOTTI, M. C. *Estados quânticos de um elétron em um campo magnético uniforme*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002.

7 GOMES, D. Equaçoes de onda associadas ao espaço-tempo de robertson-walker. *Ph. D. Thesis, IMECC-Unicamp, Campinas*, 2002.

8 CARDOSO, T. R.; CASTRO, A. S. d. Estados estacionários de partículas sem spin em potenciais quadrados. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, p. 2306–1, 2008.

9 PAULI, W.; WEISSKOPF, V. F. Über die quantisierung der skalaren relativistischen wellengleichung. *Wolfgang Pauli: Das Gewissen der Physik*, Springer, p. 407–430, 1988.

10 LIMA, T. C. S. d.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. *Revista katálysis*, SciELO Brasil, v. 10, p. 37–45, 2007.

11 GIL, A. C. et al. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002. v. 4.

12 MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. Metodologia científica: ciência e conhecimento científico, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis, metodologia jurídica. In: *Metodologia científica: ciência e conhecimento científico, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis, metodologia jurídica*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 314–314.

13 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. Lições de física–vol. 1. *Tradução de Adriana VR da Silva e Kaline R. Coutinho. Porto Alegre: Bookman*, 2008.

14 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.

15 GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2000. v. 2.

16 SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 1967.

17 STETZ, A. Advanced quantum mechanics. *Oregon State University*, 2006.

18 KRAGH, H. Equation with the many fathers. the klein–gordon equation in 1926. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 52, n. 11, p. 1024–1033, 1984.

19 BRIEF History of the Klein-Gordon Equation. 2010. Disponível em: https://4handsome.wordpress.com/2010/10/12/brief-history-of-the-klein-gordon-equation/.

20 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2004.

21 TAVARES, M.; ARROUCHA, S. *Mecânica Quântica Relativística: Uma introdução ao campo de Klein-Gordon*. [S.l.]: Novas Edições Acadêmicas, 2020.

22 DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2020.