Revista Física no Campus, vol. 3 N. 3, p. 19-33 (2023)
http://novo.revista.uepb.edu.br/fisicanocampus
Seção: Artigos Gerais
ISSN: 2764-5924

O Grupo de Lorentz na perspectiva da Álgebra Abstrata

Sabrina Kato de Paiva[1*] **e Prof. Me. João Raimundo Silva Ferreira**[2]

[1,2]Universidade Federal do Amazonas, Itacoatiara, AM, Brasil

[1,2]Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia, Itacoatiara, AM, Brasil

[1]Estudante do curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física, ICET/UFAM, Itacoatiara, AM, Brasil

*E-mail do autor principal: sabrina.kato17@gmail.com

Resumo: *Neste artigo, realizamos um estudo abrangente do Grupo de Lorentz, um conceito essencial na Teoria da Relatividade Restrita (TRR), sob uma abordagem da Álgebra Abstrata. Começamos por contextualizar os fundamentos históricos da matemática e da física, seguidos pelos conceitos básicos da Teoria de Grupos, enfatizando a sua relevância na descrição das simetrias na física. Em seguida, exploramos as características do Grupo de Lorentz, incluindo suas transformações e propriedades algébricas, sob a perspectiva da Teoria de Grupos e da álgebra linear, a fim de derivar as transformações de Lorentz. Além de fornecer um recurso valioso para estudantes de graduação interessados em compreender o Grupo de Lorentz por meio da Álgebra Abstrata, este artigo estabelece uma base sólida para a exploração dos princípios fundamentais da Relatividade Restrita e da matemática subjacente que a sustenta.*

Palavras-chave: Matemática; Física, Álgebra Abstrata

Abstract: In this article, we carry out a comprehensive study of the Lorentz Group, an essential concept in the Special Theory of Relativity (RRT), under an Abstract Algebra approach. We begin by contextualizing the historical foundations of mathematics and physics, followed by the basic concepts of Group Theory, emphasizing its relevance in the description of symmetries in physics. We then explore the characteristics of the Lorentz Group, including its transformations and algebraic properties, from the perspective of group theory and linear algebra, in order to derive the Lorentz transformations. In addition to providing a valuable resource for undergraduate students interested in understanding the Lorentz Group through Abstract Algebra, this article lays a solid foundation for exploring the fundamental principles of Special Relativity and the underlying mathematics that underpin it.

Keywords: Math, Physics, Abstract Algebra

1 Introdução

A Teoria dos Grupos na Matemática e na Álgebra Abstrata estuda estruturas chamadas grupos. Um grupo, formalmente denotado por G, é um conjunto com uma operação binária $*: G \times G \rightarrow G$ definida. Essa operação associa a cada par de elementos x e y em G um elemento em G, representado como $x * y$ que satisfaz os axiomas da associatividade, do elemento neutro e do elemento inverso ou podemos definir forma mais poética[1] *"Teoria dos Grupos é o ramo da matemática que responde à questão "O que é simetria?""*.

O conceito de grupo é fundamental na matemática, incluindo a Álgebra Abstrata. Muitas estruturas algébricas, como anéis, corpos e espaços vetoriais, podem ser representadas como grupos com operações e axiomas extras. Isso revela que, no nível fundamental, todas as estruturas algébricas têm um grupo subjacente. Além disso, a Teoria dos Grupos influencia profundamente várias disciplinas matemáticas.

Os grupos são fundamentais na matemática, especialmente em áreas como a topologia algébrica e a topologia diferencial. Eles desempenham um papel crucial na topologia algébrica ao descrever invariantes de espaços topológicos que não mudam sob transformações. Em particular, os Grupos de Lie[1] são notáveis, pois combinam uma estrutura de grupo com diferenciação suave. Eles são essenciais na análise de variedades e superfícies diferenciáveis na topologia diferencial. Em resumo, a Teoria dos Grupos tem uma influência ampla e profunda em diversas áreas da matemática.

A Teoria de Grupos, originária da matemática, desempenha um papel relevante na física, especificamente na Física de Partículas, onde é usada para modelar equações de ondas e resolver equações diferenciais. Os Grupos de Lie são particularmente importantes tanto na matemática quanto na Mecânica Quântica. Eles auxiliam na compreensão do comportamento das partículas e na associação de simetrias aos objetos físicos, um conceito formalizado por Emmy Noether, uma figura proeminente na matemática e na álgebra comutativa. O Teorema de Noether estabelece que *"Toda grandeza física conservativa corresponde a um grupo contínuo de simetrias das equações"*[2], associando a noção de conservação a noção de simetria. O grupo de Lorentz[2] que é o **Grupo de todas as transformações de Lorentz**[3], quando se deseja determinar quais transformações preservam a invariância de equações em fenômenos físicos não gravitacionais ao mudar de referencial, as transformações de Lorentz formam um grupo. Este grupo foi posteriormente generali-

1 Em homenagem a Sophus Lie.

2 O grupo Lorentz recebeu o nome do matemático e físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928).

3 As transformações de Lorentz, em homenagem ao físico neerlandês Hendrik Lorentz, descrevem como, de acordo com a TRR, as medidas de espaço e tempo de dois observadores se alteram em cada sistema de referência. Elas refletem o fato de que observadores se movendo com velocidades diferentes medem diferentes valores de distância, tempo e, em alguns casos, a ordenação de eventos.

4 O espaço de Minkowski, em homenagem ao matemático alemão Hermann Minkowski, também tratada de métrica de Minkowski, é a configuração matemática na qual a TRR de Einstein é mais comumente formulada. Nessa configuração as três dimensões usuais do espaço são combinadas com uma única dimensão do tempo para formar uma variedade quadrimensional para representar um espaço-tempo.

zado para o Espaço-Tempo de Minkowski[4] [3] que define uma série de transformações que ditam os objetos que são invariantes por essas transformações. Matematicamente é um subgrupo do grupo linear $GL\left(\mathbb{R}^4\right)$[4] e pode ser dotado da estrutura de grupo topológico. O grupo de Lorentz expressa a simetria fundamental de muitas leis naturais, mantendo invariantes equações essenciais, como as da Relatividade Especial, do eletromagnetismo e da teoria do elétron. Suas aplicações se estendem por diversas áreas do conhecimento, indo além do escopo deste artigo.

Este artigo visa mostrar os grupos de Lorentz sob a perspectiva da Álgebra Abstrata, investigando princípios fundamentais da teoria, e desenvolvendo um formalismo para sua dedução e análise.

Metodologia ou Procedimento Experimental/Prática

Para o desenvolvimento do artigo, foi realizada uma revisão bibliográfica de tópicos específicos de física básica preenchendo possíveis lacunas de conhecimento, além de estudos dirigidos em Álgebra Abstrata desde corpo, passando por grupos que deram bases matemáticas sólidas para o pleno desenvolvimento de todas as etapas e tiveram aprofundamento de tópico selecionados de Física Teórica, que é o estado da arte do estudo em questão, é o ambiente para onde convergiram todas as etapas anteriores, reforçando o rigor e a linguagem científica formal escrita e falada.

Este artigo foi desenvolvido por meio das seguintes diretrizes:

- Execução de pesquisa bibliográfica, selecionando as principais literaturas relativo à problemática em questão, elegendo os tópicos que foram estudados e explorados;
- Estudo de tópicos de física básica;
- Estudo da teoria dos principais resultados em Álgebra Abstrata, relacionados com a pesquisa;
- Estudo da teoria dos principais resultados em Física Teórica, relacionados com a pesquisa.

Desenvolvimentos e Resultados

Uma breve história da física

Desde Newton, sempre se buscou relacionar como observadores em referenciais distintos descreveriam um mesmo fenômeno, o que era relativo para cada referencial e o que permanecia o mesmo. Para Newton, tempo e espaço eram independentes e as transformações usuais para relacionar dois referenciais, inerciais ou não, eram dadas pela Transformação de Galileu, na qual o tempo era um observável que não se alterava para sistemas distintos.[5]

A transformação de Galileu é a transformação de coordenadas de posição e das componentes da velocidade do referencial S o referencial S', e é expressa pelas equações:

$$\begin{cases} x = (x' + vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{1}$$

E a inversa, as coordenadas vista do referencial S'

$$
\begin{cases}
x' = (x - vt), \\
y' = y, \\
z' = z, \\
t' = t.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Por volta de 1890, James Clerk Maxwell resumiu as leis do eletromagnetismo em um sistema de quatro equações, conhecidas como equações de Maxwell

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = &\quad \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = &\quad 0, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = &\quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} = &\quad \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A descoberta das equações de Maxwell teve implicações importantes, incluindo a previsão da existência de ondas eletromagnéticas com uma velocidade específica, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s (a velocidade da luz). A concordância entre esse valor e as observações experimentais da luz e as propriedades de polarização previstas fortaleceram a ideia de que a luz era, de fato, uma onda eletromagnética que se propagava à velocidade c.

Como as ondas necessitavam de um meio para se propagar, foi postulado então que as ondas eletromagnéticas também propagariam em algum meio chamado éter[5], onde este meio estaria presente em todo o universo. A busca pelo éter como meio de propagação das ondas eletromagnéticas levou a experimentos entre 1881 e 1887 por Michelson[6] e Morley[7], que tentaram detectar variações na velocidade da luz de acordo com o movimento da Terra. No entanto, os resultados mostraram que a velocidade da luz permanecia constante, independente do movimento da fonte emissora. Isso validou as equações de Maxwell e levou à reformulação do princípio da Relatividade Newtoniana, uma vez que as Transformações de Galileu não eram adequadas para explicar o eletromagnetismo de Maxwell.

Em 1905, Albert Einstein propôs o princípio da Relatividade Restrita, que se aplicava tanto às leis da mecânica quanto às leis da eletrodinâmica. A TRR baseia-se em dois postulados:

- As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inercias.
- A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, independente do movimento da fonte.

Os postulados da TRR, que incluem a invariabilidade da velocidade da luz para observadores em diferentes estados de movimento, resultaram em contradições com as transformações de Galileu. Essas transformações não eram compatíveis com as equações de Maxwell. Portanto, era necessária uma nova transformação que atendesse às exigências da teoria.

No ano de 1904, Hendrik Antoon Lo-

5 Na física, as teorias do éter propõem a existência de um meio, uma substância ou campo que preenche o espaço, considerado necessário como meio de transmissão para a propagação de forças eletromagnéticas ou gravitacionais.

6 Albert Abraham Michelson (1852 —1931) foi um físico norte-americano, mais conhecido por seus trabalhos com a medição da velocidade da luz e pelo Experimento de Michelson-Morley.

7 Edward Williams Morley 1838 — 1923) foi um físico estadunidense famoso pela experiência de Michelson-Morley.

rentz fez uma descoberta notável e surpreendente ao encontrar uma transformação que mantém inalteradas as características das equações de Maxwell, contanto que sejam efetuadas alterações nas propriedades dos campos. Lorentz não compreendeu completamente as implicações significativas da TRR, uma vez que ainda sustentava a convicção na existência do éter e empreendia esforços consideráveis para ajustar suas transformações de acordo com essa perspectiva. Essa transformação foi denominada **Transformação de Lorentz**, em honra ao cientista que a identificou.

As equações corretas para um referencial inercial S' (com linha) que se desloca com módulo da velocidade v no eixo x em relação a um outro referencial inercial S (sem linha) são dadas por

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}), \end{cases} \tag{4}$$

onde γ é o **fator de Lorentz**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A transformação inversa, a partir do referencial S, pode ser encontrada quando trocamos o sinal da velocidade, ficando da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}). \end{cases} \tag{5}$$

Uma breve história da Teoria de Grupos

O conceito de grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na Matemática Moderna. Dentre as diversas áreas da Ciência nas quais este conceito é fundamental estão incluídas a teoria quântica de campos, as estruturas atômica e molecular, e a cristalografia, além do próprio estudo da Álgebra Abstrata, onde tal conceito é utilizado para a construção de outras estruturas algébricas, como anéis, corpos, e espaços vetoriais, uma vez que estes podem ser vistos como grupos dotados de operações e axiomas adicionais.[6]

Durante os anos de 1500 e 1515, Scipione Del Ferro (1465 - 1526) foi um professor matemático italiano que descobriu um método para resolver a equação cúbica reduzida. Tal solução gerou a seguinte questão *"será que toda equação algébrica é resolúvel por radicais?"*.

Em meados de 1832, o matemático francês Évariste Galois começou a abordar a questão da solubilidade de equações polinomiais por meio de radicais, introduzindo o conceito de grupo solúvel. Ele procurava responder a uma pergunta levantada por Del Ferro. No entanto, seu trabalho não recebeu reconhecimento imediato, e suas descobertas foram publicadas em vários periódicos e revistas posteriormente. A Teoria de Galois desenvolveu um domínio novo da Álgebra Abstrata, ele deu origem à **Teoria dos Grupos**.

Grupos

Definição 1. *Dado um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e munido de uma operação*

$$* : G \times G \to G$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

sobre G é chamado de grupo se essa operação cumprir os seguintes axiomas:

- Associatividade:
  $(x*y)*z = x*(y*z)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in G$;
- Existência de um elemento neutro:
  Existe um elemento $e \in G$ tal que $x*e = e*x = x$, qualquer que seja $x \in G$;
- Existência de um elemento simétrico:
  Para todo $x \in G$ existe um elemento $x' \in G$ tal que $x*x' = x'*x = e$.

Se além disso, ainda se cumprir o axioma da **comutatividade**

$x*y = y*x$, para quaisquer que sejam $x, y \in G$,

o grupo recebe o nome de **Grupo Comutativo ou Abeliano** [8].

Proposição 1. *Uma estrutura algébrica $(G, *)$ tem no máximo um elemento neutro. Isto é, se $*$ tem elemento neutro, então ele é único.*

Proposição 2. *Seja $*$ uma operação sobre G que é associativa e com elemento neutro e. Se $x \in G$ é invertível, então seu inverso é único.*

Teoria da Relatividade Restrita e a Métrica de Minkowski

O grupo de Lorentz desempenha um papel central na criação de equações de onda relativísticas para descrever partículas em teorias tanto clássicas quanto quânticas, garantindo que essas equações sejam covariantes. A TRR tem como objetivo explicar o comportamento de objetos de grande escala, excluindo fenômenos quânticos, quando se aproximam da velocidade da luz. Ela se torna necessária quando a Mecânica Clássica tradicional não é mais eficaz e é aplicada em cenários sem influência significativa de campos gravitacionais, dispensando a consideração dos efeitos da Teoria da Relatividade Geral (TRG).

Geralmente, a TRR é abordada em um contexto tridimensional, representado como $3+1$ dimensões (sendo 3 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal). Porém estudaremos com algum detalhe em $1+1$ dimensões, pois leitura deste servirá para a compreensão do Grupo de Lorentz em $3+1$ dimensões.

É essencial na natureza que eventos instantâneos possam ser representados usando quatro valores que definem sua localização espacial e momento temporal em um sistema de referência. Esse conjunto de eventos instantâneos forma o espaço-tempo, um conceito introduzido por Minkowski[9]. Cada evento pode ser especificado por um sistema de referência que adote coordenadas espaciais cartesianas no $\mathbb{R}^4$, por uma quadrupla ordenada (x_0, x_1, x_2, x_3).

8 Em homenagem ao jovem matemático norueguês N. H. Abel (1802 - 1829)

9 Hermann Minkowski (1864-1909). A expressão “espaço-tempo” provém do Alemão “Raumzeit”.

Que na forma matricial será

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Por simplicidade, vamos trabalhar no $\mathbb{R}^2$, definimos um evento no espaço-tempo na forma matricial como sendo um elemento

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

aqui, x_0 é dado por ct, com c representando a velocidade da luz e t indicando o momento em que o evento ocorreu, enquanto x_1 corresponde à posição espacial do evento.

Agora tomaremos como pressuposto a existência de intervalos do tipo luz, tempo e espaço por meio da busca por um conjunto de transformações lineares que conservem a causalidade no espaço de Minkowski.

Dado dois eventos $x, y \in \mathbb{R}^2$ e escrevendo $\Delta x = y_1 - x_1$, $c\Delta t = y_0 - x_0$, há três possibilidades:

- Tipo luz: $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = 0$. Se dois eventos sãos separados por um intervalo do tipo luz, pode haver um sinal físico conectando ambos e que se propagaria com a velocidade da luz.
- Tipo tempo: $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 < 0$; Se dois eventos são separados por um intervalo do tipo tempo, pode haver sinal físico conectando ambos e que se propagaria com velocidade menor que a da luz.
- Tipo espaço: $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 > 0$; Se dois eventos são separados por um intervalo do tipo espaço, não pode haver um sinal físico conectando ambos, já que o mesmo se propagaria com velocidade maior que a da luz.

Na TRR, nenhum sinal pode se propagar a uma velocidade superior à velocidade da luz. Portanto, quando se trata de eventos do tipo espaço, nenhum sinal emitido a partir de um evento x pode alcançar um evento y. Como resultado, qualquer ocorrência em x não pode exercer influência sobre os eventos em y, o que significa que x e y não possuem uma conexão causal. No entanto, no caso de eventos do tipo tempo, uma conexão causal entre os dois eventos é possível.

Note que estas questões de causalidade são traduzidas no estudo de sinal da quantidade

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2. \tag{7}$$

Perceba que pode ser estudado através de função de intervalo entre sistemas de referências

$$s(x,y) := (x_1 - y_1)^2 - (x_0 - y_0)^2, \tag{8}$$

e que na forma matricial será

$$s(x,y) = (x_0 - y_0 \; x_1 - y_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

A matriz

$$\eta := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

é conhecida como *métrica de Minkowski*.

Mudanças de referenciais inerciais

Para obtermos as equações de transformações entre referenciais inerciais, empregaremos os postulados da TRR, aliados à suposição de homogeneidade do espaço e do tempo. Essa premissa assegura a linearidade das referidas equações, ou seja,

$$\begin{cases} x'_0 = \Lambda_{00}x_0 + \Lambda_{01}x_1 \\ x'_1 = \Lambda_{10}x_0 + \Lambda_{11}x_1. \end{cases}$$

Que na forma matricial, esse sistema de equação poderá ser representado como

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Para que a causalidade seja preservada por uma mudança de referencial Λ, basta que os sinais de Δs sejam mantidos inalterados, isto é,

$$sinal[s(\Lambda_x, \Lambda y)] = sinal[s(x,y)]. \tag{12}$$

Para estudar as possíveis mudanças de referencial, partiremos do seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja Λ uma matriz inversível 2×2 com coeficientes reais. Se Λ representa uma transformação entre sistemas de referenciais inerciais que preserva a estrutura causal do espaço-tempo e não envolve dilatações, então vale que*

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{13}$$

Por consequência, vale que

$$s(\Lambda x, \Lambda y) = s(x,y), \forall x,y \in \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

Demonstração. Dado $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, definimos

$$\begin{aligned} I(x) &:= x^T \eta x, \\ I(x) &= (x_0\, x_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ I(x) &= x_1^2 - x_0^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Assim, dispomos

$$\begin{aligned} J(x) &:= x^T \Lambda^T \eta \Lambda x, \\ J(x) &= (x_0\, x_1), \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ J(x) &= L_{00}x_0^2 + 2L_{01}x_0x_1 + L_{11}x_1^2, \end{aligned} \tag{16}$$

onde $L \equiv \Lambda^T \eta \Lambda$. Note que $L^T = \Lambda^T \eta^T \Lambda = L$.

Primeiramente consideramos o caso em que $L_{00} = 0$. Como Λ preserva os intervalos do tipo luz, teremos então que

$$s(x,y) = 0 \iff s(\Lambda x, \Lambda y) = 0. \tag{17}$$

Perceba, no entanto, que $I(x) = s(x,0), \forall x \in \mathbb{R}^2$. De maneira semelhante, $J(x) = s(\Lambda x, 0), \forall x \in \mathbb{R}^2$. Assim, a eq.(17) implica que $I(x) = 0 \iff J(x) = 0$.

Dado $I(x) = x_1^2 - x_0^2$, concluímos que $I(x) = 0 \iff x_1 = \pm x_0$. De maneira análoga, considerando que $L_{00} = 0$, podemos afirmar que $J(x) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} L_{00}x_0^2 + 2L_{01}x_0x_1 + L_{11}x_1^2 &= 0, \\ \pm 2L_{01}x_1^2 + L_{11}x_1^2 &= 0, \\ \pm 2L_{01} + L_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Somando as duas equações, podemos

concluir que $L_{01} = L_{11} = 0$. Como $L^T = L$, isto implica que $L_{10} = 0$. Dado que $L_{00} = 0$, concluímos que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Por consequência, vemos que $\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = -1 \det(\Lambda)^2 = 0$. Logo, $\det \Lambda = 0$ e descobrimos que Λ não é inversível. Oras, mas partimos do pressuposto que Λ era inversível! Já que chegamos no absurdo, podemos inferir que a hipótese tomada ($L_{00} = 0$) era absurda em primeiro lugar e podemos concluir que ela é falsa, isto é, sempre vale que $L_{00} \neq 0$.

Suponha que $L_{00} \neq 0$ (como sabemos se o caso). Temos que J é um polinômio de segundo grau na variável x_0 e podemos escrever

$$J(x) = L_{00}(x_0 - y_1)(x_0 - y_2), \tag{20}$$

onde y_1 e y_2 satisfazem

$$\begin{cases} -L_{00}(y_1 + y_2) = 2L_{01}x_1, \\ L_{00}y_1y_2 = L_{11}x_1^2. \end{cases}$$

Contudo, não é preciso considerar tais equações para obter y_1 e y_2. Note que eq.(20) garante que y_1 e y_2 são raízes de J enquanto polinômio em x_0.

Sabemos que, assumindo que Λ preserva intervalos do tipo luz, $J(x) = 0 \iff I(x) = 0$. Portanto, como ambos I e J são polinômios de segundo grau em x_0 que se anulam nos mesmos pontos, vemos que y_1 e y_2 são raízes de $I(x) = x_1^2 - x_0^2$. Logo, concluímos que $y_1 = x_1$ e $y_2 = -x_1$. Sendo assim

$$J(x) = L_{00}(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = -L_{00}I(x). \tag{21}$$

Segue então que, $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x^T \Lambda^T \eta \Lambda x &= -L_{00} x^T \eta x, \\ x^T (\Lambda^T \eta \Lambda + L_{00}^T \eta) x &= 0, \\ \Lambda^T \eta \Lambda &= -L_{00}^T \eta, \\ \eta \Lambda^T \eta \Lambda &= -L_{00}^T \mathbb{1}, \\ \det(\eta \Lambda^T \eta \Lambda) &= L_{00}^2, \\ \det(\Lambda)^2 &= L_{00}^2, \\ |\det \Lambda| &= \pm L_{00}, \\ x^T \Lambda^T \eta \Lambda x &= \pm |\det \Lambda| x^T \eta x. \end{aligned} \tag{22}$$

Note que, para que Λ preserve a estrutura causal, é necessário que o sinal escolhido seja positivo e que $x^T \Lambda^T \eta \Lambda x = |\det \Lambda| x^T \eta x, \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\mathscr{L} := \{\Lambda_0$ é a matriz 2×2 com coeficientes reais; $\eta \Lambda_0^T \eta \Lambda = \mathbb{1}\}$. Se Λ satisfaz $x^T \Lambda^T \eta \Lambda x = |\det \Lambda| x^T \eta x$, então $\Lambda = \lambda \Lambda_0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e para algum $\Lambda_0 \in \mathscr{L}$. De fato, se $\Lambda \neq 0$ satisfaz tal relação, então teremos que, $\forall \lambda > 0$,

$$\eta(\lambda^{-1}\Lambda)^T \eta(\lambda^1 \Lambda) = \lambda^{-1} |\det \Lambda| \mathbb{1}. \tag{23}$$

Tomando $\lambda = \sqrt{|\det \Lambda|}$, concluímos que $\lambda^{-1}\Lambda \in \mathscr{L}$.

Assim, Λ é o produto de um elemento de $\mathscr{L}$ com uma dilatação $\lambda \mathbb{1}$. Se Λ não inclui dilatações, então $\Lambda \in \mathscr{L}$ e, consequentemente

$$\eta \Lambda^T \eta \Lambda = \mathbb{1} \Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{24}$$

Em termos mais simples, essa relação está associada à preservação do produto escalar (ou intervalo espaço-temporal) entre eventos quando se realiza uma transformação de Lorentz.

Por fim, pela eq. (24), temos que

$$\begin{aligned} s(\Lambda x, \Lambda y) &= x^T \Lambda^T \eta \Lambda y, \\ s(\Lambda x, \Lambda y) &= x^T \eta y, \\ s(\Lambda x, \Lambda y) &= s(x, y). \end{aligned} \tag{25}$$

Isto conclui a demonstração. □

O conjunto $\mathscr{L}$ é comumente chamado de *grupo de Lorentz em* $1+1$ *dimensões*. O termo *grupo* será explicado a seguir.

A álgebra por trás das Transformações de Lorentz

Agora que conhecemos o conjunto de todas as transformações conhecidas, queremos obter sua forma explícita.

Comecemos notando que, como $\Lambda \in \mathscr{L}$ sempre satisfaz $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, vale que

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det \eta, \\ -(\det \Lambda)^2 &= -1, \\ \det \Lambda &= \pm 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Até o momento, assumiremos que $\det \Lambda = +1$. Tal condição será discutida mais adiante.

Como $\eta^{-1} = \eta$, $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1}$.

Dada uma matriz 2×2 qualquer, a sua inversa é dada em termos de suas componentes por

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & -\Lambda_{01} \\ -\Lambda_{10} & \Lambda_{00} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Calculando o produto $\eta \Lambda^T \eta$ em termos das componentes de Λ, obtemos

$$\eta \Lambda^T \eta = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{10} \\ -\Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Assim, a equação $\eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1}$ se torna (após impormos que $\det \Lambda = 1$)

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{10} \\ -\Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & -\Lambda_{01} \\ -\Lambda_{10} & \Lambda_{00} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\Lambda_{00} = \Lambda_{11}, \Lambda_{01} = \Lambda_{10}$.

A condição $\det \Lambda = 1$ ainda nos ensina que

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}\Lambda_{11} - \Lambda_{01}\Lambda_{10} &= 1, \\ \Lambda_{00}^2 &= 1 + \Lambda_{01}^2, \\ \Lambda_{00} &= \pm\sqrt{1 + \Lambda_{01}^2}. \end{aligned}$$

Logo $\Lambda_{00} \neq 0$. Por ora, assumiremos que $\Lambda_{00} > 0$.

Concluímos então que $\Lambda \in \mathscr{L}$, se valerem $\det \Lambda = +1$ e $\Lambda_{00} > 0$, é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{01} & \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Agora vamos obter Λ_{01}. Suponha um evento que ocorre no referencial S. Por exemplo, um fóton no referencial S é emitido pela partícula numa certa posição x e num certo instante de tempo t. Queremos descobrir qual a posição x' e qual o instante do tempo t' em que um observador no referencial S' observa o mesmo evento.

Como a partícula está sempre na origem do seu sistema de coordenadas, a emissão de fóton para o referencial S' se dá em algum instante de tempo t' e posição $x' = 0$. No referencial S, sabemos que a partícula se move com velocidade v, então se o evento ocorreu no instante t, ele se deu na posição $x = vt$.

Dessa forma, apresentamos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} ct' = \sqrt{1+\Lambda_{01}^2}\,ct + \Lambda_{01}\,vt \\ 0 = \Lambda_{01}ct + \sqrt{1+\Lambda_{01}^2}\,vt, \end{cases} \tag{30}$$

que escrito na forma matricial ficará

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Lambda_{01}^2} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{01} & \sqrt{1+\Lambda_{01}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Desenvolvendo apenas a segunda linha do sistema de equação(30)

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_{01}ct + \sqrt{1+\Lambda_{01}^2}vt, \\ \Lambda_{01} &= -\sqrt{1+\Lambda_{01}^2}\frac{v}{c}, \end{aligned} \tag{32}$$

de onde podemos concluir que

$$\Lambda_{01} = \pm\beta(v)\frac{1}{\sqrt{1-\beta(v)^2}}, \tag{33}$$

onde definimos

$$\beta(v) := \frac{v}{c},\ \gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta(v)^2}}. \tag{34}$$

Devido ao fato de que a eq.(32) implica que $\Lambda_{01} < 0$, a eq.(33) ficará apenas com o sinal negativo

$$\Lambda_{01} = -\beta(v)\frac{1}{\sqrt{1-\beta(v)^2}}. \tag{35}$$

Como $\Lambda_{00} = +\sqrt{1-\Lambda_{01}^2}$, obtemos

$$\Lambda_{00} = \gamma(v). \tag{36}$$

Logo, se $\Lambda \in \mathscr{L}$, $\det\Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0$, teremos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Substituindo o expressão (37) em (11), e assumindo $x_0 = ct$ e $x_1 = x$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(v)(ct - \beta(v)x), \\ x' = \gamma(v)(x - \beta(v)ct). \end{cases} \tag{38}$$

Estas são as chamadas *Transformações de Lorentz*. A simetria entre x e ct é a razão de termos escolhido trabalhar com ct ao invés de simplesmente t.

Observe que, ao assumirmos que $v \ll c$, podemos inferir que $\frac{v}{c} \ll 1$ e, consequentemente, $\gamma(v) \approx 1$. Nesse contexto, alcançamos o regime não-relativístico

$$\begin{cases} ct' = ct, \\ x' = x - vt, \end{cases} \tag{39}$$

que são as transformações de Galileu da Mecânica Clássica.

Para $v = 0$, obtemos

$$\begin{cases} ct' = ct, \\ x' = x. \end{cases} \tag{40}$$

Os limites indicam que estamos no caminho certo, pois a TRR consegue reproduzir com sucesso os resultados da Mecânica a baixas velocidades, que são uma representação precisa do Universo. É fundamental que nossa nova teoria também os reproduza para evitar uma explicação inadequada ao expandir nosso conhecimento. Por simplicidade introduzimos a seguinte notações que são componentes conexas do grupo de Lorentz:

$$\mathscr{L}_{+}^{\uparrow} = \{\Lambda \in \mathscr{L}; \det\Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0\},$$
$$\mathscr{L}_{+}^{\downarrow} = \{\Lambda \in \mathscr{L}; \det\Lambda = +1, \Lambda_{00} < 0\},$$
$$\mathscr{L}_{-}^{\uparrow} = \{\Lambda \in \mathscr{L}; \det\Lambda = -1, \Lambda_{00} > 0\},$$
$$\mathscr{L}_{-}^{\downarrow} = \{\Lambda \in \mathscr{L}; \det\Lambda = -1, \Lambda_{00} < 0\}.$$

Teorema 2. *Sejam as matrizes* P *e* T *dadas por*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Então vale que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{+}^{\downarrow} &= \{\mathrm{TP}\Lambda; \mathscr{L}_{+}^{\uparrow}\}, \\ \mathscr{L}_{-}^{\uparrow} &= \{\mathrm{P}\Lambda; \mathscr{L}_{+}^{\uparrow}\}, \\ \mathscr{L}_{-}^{\downarrow} &= \{\mathrm{T}\Lambda; \mathscr{L}_{+}^{\uparrow}\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{T}^2 = \mathbb{1}$, $\mathrm{P}^T = \mathrm{P}$ e $\mathrm{T}^T = T$.

Temos também que $\mathrm{PT} = \mathrm{TP}, \mathrm{P}\eta = \eta\mathrm{P}$ e $\eta\mathrm{T} = \mathrm{T}\eta$.

Seja $\mathrm{A} \in \mathscr{L}_{+}^{\downarrow}$. Tomando $\Lambda = \mathrm{PTA}$.

Teremos que

$$\begin{aligned} \Lambda^T\eta\Lambda &= (\mathrm{PTA})^T\eta(\mathrm{PTA}), \\ \Rightarrow \Lambda^T\eta\Lambda &= \mathrm{A}^T\mathrm{T}^T\mathrm{P}^T\eta\mathrm{PTA}, \\ \Rightarrow \Lambda^T\eta\Lambda &= \mathrm{A}^T\mathrm{T}^T\eta\mathrm{TA}, \\ \Rightarrow \Lambda^T\eta\Lambda &= \mathrm{A}^T\eta\mathrm{A}, \\ \Rightarrow \Lambda^T\eta\Lambda &= \eta. \end{aligned}$$

Logo, $\Lambda \in \mathscr{L}$. Vale que $\det\Lambda = +1$, já que

$$\begin{aligned} \det\Lambda &= \det(\mathrm{PTA}), \\ \Rightarrow \det\Lambda &= \det\mathrm{P}\det\mathrm{T}\det\mathrm{A}, \\ \Rightarrow \det\Lambda &= +1. \end{aligned}$$

Além do mais $\Lambda_{00} > 0$, pois

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{00} & \mathrm{A}_{01} \\ \mathrm{A}_{10} & \mathrm{A}_{11} \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} -\mathrm{A}_{00} & -\mathrm{A}_{01} \\ -\mathrm{A}_{10} & -\mathrm{A}_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

e $\mathrm{A}_{00} < 0$. Isto garante o teorema para todos elementos de $\mathscr{L}_{+}^{\downarrow}$. □

Grupo de Lorentz

Uma das propriedades interessantes de $\mathscr{L}$ é sua estrutura de *grupo*. Como $\mathscr{L}$ é um conjunto de matrizes e nós sabemos como calcular o produto de duas matrizes, podemos estudar como $\mathscr{L}$ se comporta em relação ao produto usual de matrizes.

Teorema 3. *O conjunto $\mathscr{L}$ munido do produto usual de matrizes é um grupo.*

Demonstração. Sejam $\Lambda, \mathrm{M} \in \mathscr{L}$. Então sabemos que

$$\begin{cases} \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \\ \mathrm{M}^T \eta \mathrm{M} = \eta. \end{cases}$$

Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} (\Lambda \mathrm{M})^T \eta (\Lambda \mathrm{M}) &= \mathrm{M}^T \Lambda^T \eta \Lambda \mathrm{M}, \\ &= \mathrm{M}^T \eta \mathrm{M}, \\ &= \eta, \end{aligned}$$

e portanto $\Lambda \mathrm{M} \in \mathscr{L}$.

Como o produto de matrizes é associativo para quaisquer três matrizes com coeficientes complexos, ele é associativo para matriz de $\mathscr{L}$.

Note que $\mathbb{1} \in \mathscr{L}$. De fato,

$$\mathbb{1}^T \eta \mathbb{1} = \mathbb{1} \eta \mathbb{1} = \eta.$$

Como $\Lambda \mathbb{1} = \mathbb{1} \Lambda = \Lambda$, vemos que $\mathscr{L}$ admite uma identidade.

Por fim, dado $\Lambda \in \mathscr{L}$, queremos mostrar que $\Lambda^{-1} \in \mathscr{L}$. Veja que

$$\begin{aligned} \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta, \\ (\Lambda^{-1})^T \Lambda^T \eta \Lambda \Lambda^{-1} &= (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}, \\ (\Lambda \Lambda^{-1})^T \eta (\Lambda \Lambda^{-1}) &= (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}, \\ \eta &= (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}, \end{aligned} \tag{43}$$

e portanto $\Lambda^{-1} \in \mathscr{L}$.

Assim, concluímos que $\mathscr{L}$ munido com o produto usual de matrizes é, de fato, um grupo. □

O seguinte teorema será enunciado sem prova.

Teorema 4. *O conjunto $\mathscr{L}_+^\uparrow$ munido do produto usual de matrizes é um grupo, que denominamos de grupo de Lorentz próprio ortócrono em $1+1$ dimensões.*

Os demais componentes de $\mathscr{L}$ – $\mathscr{L}_+^\downarrow, \mathscr{L}_-^\uparrow$ e $\mathscr{L}_-^\downarrow$ não são grupos, o que pode ser visto imediatamente pelo fato de não conterem a identidade.

A primeira implicação que o teorema nos fornece é que a composição de boosts[10] de Lorentz é também um boost de Lorentz. Com um pouco de álgebra, pode-se mostrar que

$$\begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) & -\beta(u)\gamma(u) \\ -\beta(u)\gamma(u) & \gamma(u) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(\alpha) & -\beta(\alpha)\gamma(\alpha) \\ \beta(\alpha)\gamma(\alpha) & \gamma(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \Lambda(v)\Lambda(u) = \Lambda(\alpha) \tag{44}$$

considerando $\alpha = \left(\dfrac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \right)$.

Quando examinamos os boosts de Lorentz em quatro dimensões (ou seja, $3+1$ dimensões), esse resultado deixa de ser válido, e a combinação de boosts de Lorentz não é mais necessariamente um boost. A forma mais geral de um elemento pertencente ao grupo de Lorentz em $3+1$ dimensões consiste em uma sequência de uma rotação, seguida por um boost, e em seguida, outra rotação. A abordagem da Álgebra Abstrata nos proporcionou a confiança de que poderíamos derivar a lei de composição de velocidade na TRR, conforme a eq.(44), antes de precisarmos realizar cálculos complexos sem uma direção clara.

10 Do inglês *to boost*: impulsionar, propelir, impelir, empurrar. Esse vocábulo é geralmente usado em Física para denominar transformações entre sistemas de coordenadas inerciais que envolvam apenas mudanças de velocidades.

A seguir, veremos que a Teoria de Grupos também nos garante a unicidade boost igual à identidade. O Teorema 3 garante de $\mathbb{1} \in \mathscr{L}$, e a proposição (1) garantem a unicidade desta identidade.

Observe que a identidade é representada por $\Lambda(0)$, que é a transformação de Lorentz com velocidade $v = 0$, sem inversões de paridade ou inversões temporais. A veracidade de que esse elemento é, de fato, a identidade pode ser confirmada por meio da aplicação da regra de composição de velocidade, conforme a eq.(44), juntamente com o Teorema 2.

De modo análogo, também podemos assegurar que cada boost possui um boost inverso. Além disso, podemos ter confiança de que esse boost inverso é único, pela proposição 2 demonstrada.

De acordo com a regra de composição de velocidade, é evidente que o inverso de qualquer elemento pertencente ao grupo de Lorentz próprio e ortócrono, representado como $\Lambda(v)$, é representado por $\Lambda(-v)$. A validade deste resultado assegura-nos que este inverso é único. Para obter os inversos dos outros elementos do grupo de Lorentz, podemos aplicar a regra de composição de velocidade em conjunto com o Teorema 2.

A relevância física desse resultado reside na ideia de que toda transformação de referencial é passível de reversão. Se conseguimos compreender como realizar a transição do referencial S para S', isso automaticamente nos confere a habilidade de efetuar a transição de S' para S, e essa inversão acontece de forma singular. Além disso, essa observação confirma nossa adesão ao princípio da Relatividade, uma vez que as leis de transformação de S para S' são idênticas às de S' para S (se S' se move a uma velocidade v em relação a S, então S se move a uma velocidade $-v$ em relação a S').

Considerações Finais

Neste artigo enfatizamos a relevância da Teoria de Grupos para a física, destacando como essa abordagem é essencial para assegurar a validade do princípio da Relatividade em diferentes referenciais, tanto clássicos quanto relativísticos.

A análise das transformações de Lorentz usando a Álgebra Abstrata revela a elegância e profundidade na descrição da TRR. Ela nos permite compreender as interações, propriedades e grupos matemáticos subjacentes a essas transformações. A Teoria de Grupos é essencial para caracterizar e classificar as transformações de Lorentz, garantindo a invariância da velocidade da luz e a coerência das leis da física em diferentes referenciais inerciais. Isso fortalece a confiança na TRR como um arcabouço sólido na física moderna. Além disso, essa abordagem enriquece nossa compreensão das implicações e da estrutura matemática da Relatividade Restrita, destacando a importância da matemática abstrata na Física Teórica.

Agradecimentos

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Nathan Carter. *Visual group theory*. Vol. 32. American Mathematical Soc., 2021.

[2] Emmy Noether. "Invariante variations probleme". Em: *Transport Theory and Statistical Physics* 2 (1918), pp. 235–257.

[3] Jesrrael Fonseca Santos et al. "Grupos de Lie, simetrias e suas aplicações em Física". Em: (2020).

[4] João Carlos Alves Barata. *Notas para um Curso de Física-Matemática*. Ed. por João Carlos Alves Barata. Departamento de Física Matemática - USP, 2022.

[5] Pedro Contino da Silva Costa. "Transformações de Lorentz e seus invariantes". Em: (2011).

[6] Josiney Alves de Souza. "Uma nota sobre a teoria dos grupos: da teoria de galois à teoria de gauge". Em: *Revista Brasileira de História da Matemática* 12.24 (2012), pp. 71–81.

[7] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. Editora Blucher, 2014.

[8] Paul Allen Tipler e Ralph A Llewellyn. *Física Moderna*. 6ª ed. LTC, 2017.

[9] Vandenberg Lopes Vieira. *Álgebra abstrata básica: Textuniversitários 8*. 1ª ed. Vol. 1. Editora Livraria da Física, 2021.

[10] Gelson Iezzi e Hygino Domingues. *Álgebra moderna*. 5ª ed. Saraiva Uni, 2018.

[11] Arthur Beiser. *Conceito de Física Moderna*. Polígono, 1969.

[12] Níckolas Alves. "O Grupo de Lorentz: Relatividade Restrita aos olhos de um matemático". Em: (2020).

[13] Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes. "Representações Spinorais do Grupo de Lorentz e Equações de Onda Relativísiticas". Em: (2012).