

## UM ESTUDO SOBRE O USO DE FASES GEOMÉTRICAS NA FÍSICA

### A STUDY ON THE USE OF GEOMETRIC PHASES IN PHYSICS

<sup>1</sup>Mateus Ryan Carmo Costa, <sup>2</sup>Marcos Lucena Rodrigues, <sup>3</sup>Everton Cavalcante;  
<sup>1,2,3</sup>Universidade Estadual da Paraíba, Brasil

**Resumo:** Com o trabalho de Aharonov e Bohm em 1959, a história viu um constante crescimento no número de trabalhos que focavam seus esforços na pesquisa do conceito de fases geométricas, em especial, a área da física da matéria condensada e suas aplicações deu grandes contribuições para a compreensão de causa e efeitos de tal abstração, tão profunda foram as pesquisas que por se só formaram um ramo completamente novo. Transpassando pela concepção de processos holonômicos na mecânica quântica, o teorema adiabático, a fase de Berry e sua categorização como independente do tempo e o efeito Aharonov-Bohm, é possível ter uma compreensão abrangente sobre a ocorrência e o uso das fases geométricas, onde, por fim podemos referenciar aplicações da contemporaneidade, especificamente na área da computação quântica onde tais conceitos podem ser aplicados a fim de criar sistemas estáveis e tolerante a falhas.

**Palavras-chave:** Fase de Berry, Processos Holonômicos, Computação Quântica.

**Abstract:** With the work of Aharonov and Bohm in 1959, history saw a constant growth in the number of works that focused their efforts on researching the concept of geometric phases, in particular, the area of condensed matter physics and its applications made great contributions to the understanding of the cause and effects of such an abstraction. So profound was the research that by itself it only formed a completely new branch. Going through the conception of holonomic processes in quantum mechanics, the adiabatic theorem, the Berry phase, and its categorization as independent of time and the Aharonov-Bohm, it is possible to have an understanding of the occurrence and use of geometric phases. Moreover, we can reference contemporary applications, specifically in the quantum computing branch. As well, how these concepts can be applied in order to create systems with stability and fault-tolerant characteristics.

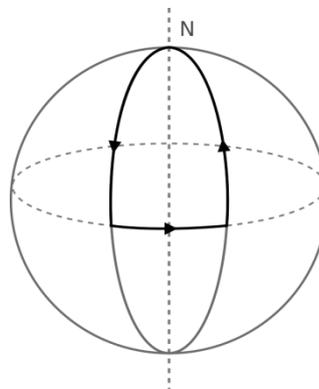
## Introdução

Um dos experimentos mais clássicos da física é o pêndulo de Foucault, que consistia na definição de um sistema de oscilações harmônicas em um referencial não inercial, neste caso o próprio planeta terra, onde o movimento do sistema é diretamente afetado pela rotação da terra em torno de seu eixo. O sistema tem o ângulo do seu plano de oscilação modificado conforme o tempo passa. Este experimento se tornou célebre por ser o primeiro a provar de forma simples e direta o comportamento de rotação do planeta [1]. Uma característica importante do sistema de Foucault é o fato de o movimento da terra ser dado de tal forma que não modifique a amplitude de oscilação do pêndulo, e isto ocorre pois o período referente a rotação da terra é ordens de grandeza maior do que o período de oscilação do sistema.

Um problema similar é o de submeter um pêndulo ao chamado transporte paralelo em relação a própria terra, ele se caracteriza da seguinte forma: pondo por exemplo um pêndulo no ponto exato do polo norte da terra onde seu plano de oscilação está paralelo ao meridiano de Greenwich. Ignorando a rotação da terra, fazemos o transporte do pêndulo pela linha do meridiano até o ponto em que ela se cruza com a linha do equador, então a partir deste ponto o movimento se dá paralelamente a linha do equador com sentido ao leste do planeta, percorrendo uma latitude de  $24^\circ$ ; assim chegando ao ponto de intersecção com outro meridiano este que passa pela África do sul, por último o transportando de volta ao polo norte paralelamente a este segundo meridiano. Sendo este caminho feito em um tempo muito maior

do que o período de oscilação do pêndulo.

Figura 1 - Representação geométrica do caminho tomado pelo pêndulo.



Podemos notar quase que imediatamente que este processo é similar ao do pêndulo de Foucault, uma vez que realiza um movimento cíclico, porém uma similaridade agora menos notável é que ao passar pelo transporte paralelo o sistema não volta a seu estado original, uma vez que durante a segunda parte do trajeto o ângulo do plano de oscilação é alterado em relação ao referencial inicial. A diferença entre o ângulo inicial e final é o ângulo sólido que subentende o caminho tomado [2].

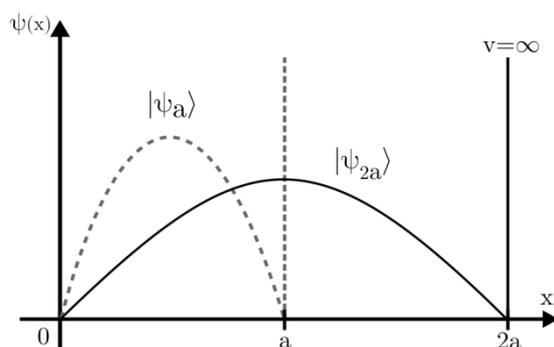
Ambas as situações possuem como fator comum: a dependência de uma mudança externa não abrupta, no sentido que mantenha o sistema interno (o pêndulo) inalterado um processo que obedece a esta regra é chamado de adiabático [2, 3], e o fato de não voltarem ao seu estado original quando completam seu ciclo, processos que possuem esta característica recebem o título de não-holonômicos. E o título holonômico é dado para os sistemas que retornam ao seu estado inicial [4].

Podemos propor um problema parecido com estes, mas agora no mundo da mecânica quântica, o que

acontece com a função de onda de um sistema físico que é alterado muito lentamente por um ente externo? Como exemplo: qual o comportamento de um poço quadrado infinito que tem sua parede de potencial movida lentamente até um ponto duas vezes mais distante da origem que o original?

Se submetermos a função de onda a passar de uma situação para outra de forma a manter uma transição muito lenta, podemos realizar certas aproximações que reduzam um problema da equação de Schrödinger dependente do tempo. Aproximando de forma que levamos um Hamiltoniano de uma forma inicial  $H_i$  a uma forma final  $H_f$ , segundo o teorema adiabático, uma vez que a função de onda esteja no  $n$ -ésimo estado de  $H_i$  ela será transportada para o  $n$ -ésimo estado de  $H_f$  [2, 5].

Figura 2 - Processo adiabático de expansão de uma das paredes do poço quadrado infinito. Fonte: Ref. [2].



Em um caso como este temos um Hamiltoniano instantâneo (dependente do tempo), de forma que podemos expressar seus autovalores e autoestados da seguinte maneira:

$$\hat{H}(t)|\Psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\Psi_n(t)\rangle \quad (1)$$

Caso esta equação não o cause espanto talvez não tenha pensado no que ela representa, uma vez que os estados estacionários deveriam ter uma energia bem definida e não dependentes do tempo. Além deste fator, é possível observar que esta equação é invariante a certos tipos de fases. A equação de Schrödinger para este caso é:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \quad (2)$$

A resolução desta equação resultará no seguinte:

$$\gamma_n(C) = \int_C i \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} | \psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (3)$$

Está que é um ângulo de fase na função de onda chamada de fase geométrica [6].

## Metodologia

Esta pesquisa tem caráter de levantamento bibliográfico sistemático, onde temos como objetivo geral, a obtenção de dados científicos válidos sobre o tema principal e a busca por aplicações no mundo contemporâneo.

Inicialmente, buscava-se entender o material histórico referente ao assunto, as bases na teoria quântica, analogias clássicas úteis, efeitos provenientes, todo e qualquer assunto relevante que tivessem envolvimento de alguma forma com fases geométricas. A ideia até este momento era entender profundamente a importância do tema principal para a física e como um ramo totalmente novo da física da matéria condensada se formou a partir daí.

A segunda parte por sua vez tinha o

caráter mais livre no que se diz respeito a conteúdos postos em pauta, idealmente esta parte consistia em levantar um grande número de referências que usassem das fases geométricas ou de efeitos relacionados a elas como núcleo principal de sua pesquisa de aplicação. No início foi cogitado que a pesquisa se voltaria a busca por aplicações em nanomateriais e sistemas de baixa dimensionalidade diretamente, contudo, durante o percorrer da pesquisa o número de referências que relacionavam o uso de fases geométricas e a computação quântica se destacaram ao ponto de virar a principal tópico no quesito aplicações.

## Desenvolvimento

Não existe nenhuma forma trivial de resolver a equação 2, e nem retirar informações úteis nesta forma. Para tentar resolver este problema podemos utilizar a invariância da primeira equação em relação a algumas fases, vamos adicionar duas a equação buscando um método de aproximação; a dinâmica por exemplo é utilizada em vários problemas físicos, além dela por garantia vamos utilizar outra fase genérica chamada de  $C$ .

$$|\Psi_n(t)\rangle = C_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} |\psi_n(t)\rangle \quad (4)$$

Deixando  $\psi$  desta forma é possível uma resolução da equação de Schrödinger, porém a utilizando para determinar  $C$ , por fins de simplicidade vamos chamar o expoente da fase dinâmica de  $\theta$ :

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (5)$$

Podemos substituir o valor de  $\psi$  na equação de Schrödinger, o que resulta na seguinte expressão:

$$i\hbar \dot{C} e^{i\theta_n(t)} |\psi_n(t)\rangle + E_n |\psi_n(t)\rangle i\hbar e^{i\theta_n(t)} C |\dot{\psi}_n(t)\rangle = E_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

$$\therefore \dot{C} |\psi_n(t)\rangle = -C |\dot{\psi}_n(t)\rangle \quad (6)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação pelo Bra da  $n$ -ésima função de onda é possível utilizar a propriedade de delta de Kronecker:

$$\dot{C} \langle \psi_n(t) | \psi_n(t) \rangle = -C \langle \psi_n(t) | \dot{\psi}_n(t) \rangle$$

$$\therefore \dot{C} = -C \left\langle \psi_n(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \psi_n(t) \right\rangle \quad (7)$$

Esta que é uma simples equação diferencial linear de primeira ordem que pode ser resolvida usando o método de separação de variáveis, o resultado desta equação é:

$$C = e^{\int_0^t i^2 \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{d}{dt'} \right| \psi_n(t') \right\rangle dt'} \quad (8)$$

Assim como a fase dinâmica daremos um nome para o expoente deste resultado, o chamaremos de  $\gamma$ , logo:

$$\gamma_n(t) = \int_0^t i \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{d}{dt'} \right| \psi_n(t') \right\rangle dt' \quad (9)$$

Este valor nada mais é do que o responsável por dar nome a este trabalho e por iniciar um ramo inteiro na física da matéria condensada,  $\gamma$  assim como  $\theta$ , é uma fase, mas seu nome é fase geométrica. Ela é a responsável pela possibilidade de aproximação adiabática e de todos os seus efeitos, graças a ela,  $\Psi$  se torna determinado:

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |\psi_n(t)\rangle \quad (10)$$

Se levássemos em conta a apresentação do conceito de fase geométrica como apenas uma forma de se fazer aproximações em processos adiabáticos, seria bem difícil imaginar como este conceito ganhou tanta atenção desde sua descoberta. Dando uma primeira olhada em sua formulação parece que nem mesmo seu nome é justificado, pois a forma atual em que a encontramos pode levar a errônea interpretação de que ela depende do tempo assim como a fase dinâmica.

Durante a aplicação do teorema adiabático foi demonstrado que o Hamiltoniano e os estados dependiam do tempo, mas para a tal ocorrência algo deve acontecer com a configuração do sistema, algum parâmetro que define seu estado deve sofrer uma variação. Se chamarmos esse parâmetro de um vetor  $\vec{R}(t)$ , podemos reescrever a condição inicial da aproximação adiabática para:

$$\hat{H}(t)|\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle = E_n(t)|\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle \quad (11)$$

Este parâmetro  $\vec{R}$  está relacionado com a mudança do sistema em si, no caso do poço, está relacionado com o movimento da parede de potencial.

Assim, resolvendo a equação de Schrödinger obtemos o mesmo resultado para a fase geométrica, mas agora em função de  $\vec{R}(t)$ .

$$\gamma_n(t) = \int_0^t i \langle \psi_n(\vec{R}(t')) | \frac{d}{dt'} | \psi_n(\vec{R}(t')) \rangle dt' \quad (12)$$

Explicitando o fator do interior da integral temos:

$$v_n(t) = i \langle \psi_n(\vec{R}(t)) | \frac{d}{dt} | \psi_n(\vec{R}(t)) \rangle \quad (13)$$

Este fator ainda está em função de  $t$ , porém, podemos usar a regra da cadeia com a derivada e explicitá-la de outra forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{R}(t)) &= \frac{d}{dt} f(R_1(t) \dots R_N(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

Este fator é extremamente familiar, uma vez que  $\vec{R}$  é um vetor, este resultado é congruente a um produto interno entra as derivadas de  $f$  em relação a  $\vec{R}$  (que caracteriza um gradiente em relação as componentes deste vetor), e as derivadas dos componentes do vetor em relação a  $t$ . Logo esta relação resulta em:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{R}(t)) = \nabla_{\vec{R}} f \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (15)$$

Logo podemos rescrever o fator  $v$  utilizando esta nova forma da derivada como:

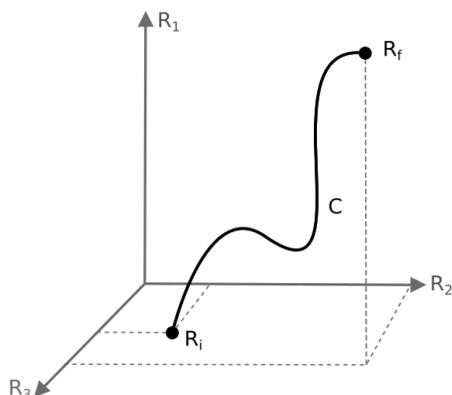
$$v_n(\vec{R}) = i \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} | \psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (16)$$

Reescrevendo a fase geométrica, tomando novos limites de integração, temos:

$$\gamma_n(C) = \int_C i \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} | \psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (17)$$

Para este fator de fase fica explícito a não dependência direta do tempo da fase geométrica, mas para deixar mais claro, vamos representar o espaço de configuração do vetor  $\vec{R}$ .

Figura 3 - Espaço formado pelos componentes do vetor  $\vec{R}$  em um exemplo com 3 dimensões.



A fase geométrica depende única e exclusivamente do caminho tomado no espaço de  $\vec{R}$ , não importa o tempo necessário para percorrer este caminho (Contanto que o teorema adiabático seja respeitado).

Se o Hamiltoniano volta para seu estado original, o caminho **C** deste espaço se torna fechado, caracterizando um processo holonômico neste espaço. Para este caso temos a seguinte equação:

$$\gamma_n(C) = \oint_C i \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} | \psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (18)$$

Estes resultados foram explicitados pela primeira vez por Michel Barry em 1984 [6], em uma publicação onde não só a solução é demonstrada como também suas propriedades mais interessantes encontradas até aquele momento. Algo que vale apenas ser comentado aqui é que esta fase é extremamente semelhante a equação de potencial vetor do Eletromagnetismo.

Um dos recursos mais utilizados da física são os potenciais, que na maioria dos casos são considerados apenas

ferramentas puramente matemáticas que facilitam a descrição de sistemas. Tal interpretação é plausível dada a invariância destas construções às transformações de Gauge (ou Calibre), este aspecto nos leva a acreditar que apenas os fatores mais básicos em que as abstrações de potencial foram baseadas são fisicamente mensuráveis [2]. Dois exemplos são o potencial elétrico  $\varphi$  e o potencial vetor magnético  $\vec{A}$ , onde apenas os campos que geram tais potenciais são considerados como aspectos verdadeiramente “físicos”. Porém, toda a mecânica analítica utiliza quase que exclusivamente os conceitos de potencial e energia para descrever o movimento, isso inclui a formulação Hamiltoniana que serve de base para o formalismo quântico [7], estendendo o exemplo dos campos do eletromagnetismo, a equação de Schrödinger para quaisquer sistemas que os envolvam é dada por:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla^2 - q\vec{A} \right)^2 + V \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \quad (19)$$

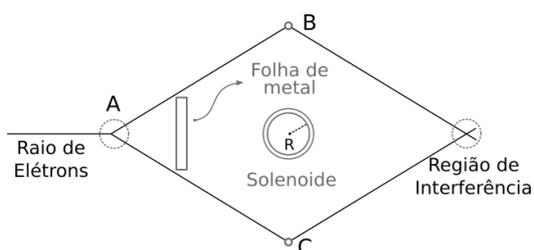
Dada esta equação, o que acontece se por algum motivo em uma certa situação os campos elétrico e magnético forem zero, mas o vetor  $\vec{A}$  não? Uma vez que é possível a existência de um vetor não nulo que tenha o rotacional igual a zero. David Bohm e Yakir Aharonov propoaram um experimento onde este processo acontece, e publicaram um artigo em 1959 [8] com resultados que mostravam mais um ponto onde a mecânica quântica destoa completamente da teoria clássica.

O experimento proposto consistia em atirar um raio de elétrons em direção a um solenoide com extensão considerável. Antes da chegada das partículas ao solenoide, o feixe era dividido por uma folha de metal,

<sup>1</sup>mateus.costa@aluno.uepb.edu.br

passando pelas laterais do solenoide e então sendo refletidos de volta para o ponto central; criando uma região de interferência reunindo o raio novamente.

Figura 4 - Representação do experimento de Aharonov-Bohm. Fonte: Ref [7].



O campo magnético se restringia ao interior do solenoide, de forma que em todo o caminho percorrido pelos elétrons tem campos nulos. Porém, devido as transformações de calibre o potencial vetor pode ser diferente de zero.

As conclusões demonstradas no artigo apontavam que ao recombinar os feixes após passar por este processo, a função de onda apresentava uma diferença de fase que tinha o valor de:

$$\gamma_n(C) = \frac{iq}{\hbar} \oint_C \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \Phi \quad (20)$$

Onde o caminho  $C$  é a circulação em torno do fluxo magnético [6, 8]. Este resultado seria simplesmente chocante para quem não é familiar com os aspectos excêntricos da teoria quântica, não é fácil de entender como o fluxo magnético  $\Phi$  que está unicamente no interior do solenoide pode causar uma diferença na função de onda de uma partícula que não chega a interagir com ele. Além disso, imaginar que o

potencial vetor pode gerar uma diferença mensurável no resultado, o que vai de encontro a ideia de que os potenciais são apenas construtos matemáticos úteis. Este efeito causado pelo vetor  $\vec{A}$  foi chamado de efeito Aharonov-Bohm.

Uma das aplicações imediatas das fases geométricas é a computação quântica. Esta que se baseia em sistemas quânticos (geralmente de dois estados), para armazenarem informações e transformações de seus estados para gerarem processamento. Existem várias propostas de aplicações dos conceitos apresentados aqui na elaboração de computadores quânticos; como o uso direto da fase de Berry. O acúmulo de fases geométricas mesmo em processos não adiabáticos, ou casos em que a fase dinâmica é equivalente a geométrica [9].

A justificativa para tal aplicação é a de que a robustez em sistemas desse tipo é superior a sistemas baseados em fases dinâmicas, um exemplo disto é o fato de uma fase geométrica ser uma propriedade global do sistema, logo é invariante a erros locais [9]. Existem diversas implementações propostas pela literatura desde o início deste século, todos com a mesma justificativa já estabelecida: a procura por uma computação quântica tolerante a falhas. [10, 11]

## Resultados

O levantamento bibliográfico resultou em um número verdadeiramente extenso de trabalhos na área, com os mais diversos temas, a base formada pelo efeito Aharonov - Bohm e os trabalhos de Berry quase sempre são o destaque, porém o número de aplicações é vasto, do relacionamento com cristais e falhas

topológicas à computação quântica holonômica.

A dependência direta de um caminho no espaço de parâmetros e não necessariamente do tempo faz com que fases geométricas sejam interessantes para diversas áreas, uma vez que fatores como este podem ser mais controláveis do que uma fase dinâmica o que deixa justificado o interesse ao ponto de gerar uma área completamente nova de conhecimento dentro da física da matéria condensada.

### Considerações Finais

Do surgimento no teorema adiabático, o refinamento dado pela percepção da independência do tempo, a ideia de que efeitos já descobertos poderiam ser explicados por ela, ao seu uso para a redução de erros no que talvez será um dos maiores passos da humanidade em relação ao futuro; as fases geométricas mostram ser de fundamental importância para a física como a conhecemos hoje, e dado o número de pesquisas atribuídas ao assunto, promete ter ainda mais aplicações e usos em outros processos importantes.

Muitas foram as evoluções da física por fatores semelhantes, cito por exemplo o princípio da mínima ação, que mostra que podemos reduzir problemas extremamente complexos a algo controlado, uma vez que todos os sistemas dinâmicos do universo devem obedecer. O fato da dependência única da fase geométrica do fator de mudança de estado, assim como o princípio de Hamilton, reduz drasticamente a complexidade de alguns problemas fazendo com que tenhamos uma melhor previsão deste tipo de sistemas.

### Referências

- [1] OPREA, J. Geometry and the Foucault Pendulum. **The American Mathematical Monthly**, v. 102, p. 515-522, 1995.
- [2] GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2 ed., São Paulo: Pearson, 2011.
- [3] HANDY, N. C.; LEE A. M. The Adiabatic Approximation. **Chemical Physics Letters**, v. 252, p. 425-430, 1996.
- [4] BLOCH, A. M. **Nonholonomic Mechanics and Control**. 1 ed., Springer, 2003.
- [5] Born, M.; Fock, V. Beweis des Adiabatsatzes. **Zeitschrift Für Physik**, v. 51, p. 165-180, 1928.
- [6] BERRY, M. V. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 392, p. 45-57, 1984.
- [7] MESSIAH, A. **Quantum Mechanics**. Dover books on physics, 1999.
- [8] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Physical Review**, v. 115, p. 485-491, 1959.
- [9] SJÖQVIST, E. A new phase in quantum computation, **Physics** 1, 35, 2008.
- [10] VEDRAL, V. Geometric Phases and Topological Quantum Computation.



**International Journal of Quantum Information**, v. 1, n. 1, p. 1-23, 2003.

[11] PACHOS J.; ZANARDI, P. Quantum Holonomies for Quantum Computing. **International Journal of Modern Physics B**, n. 9, v. 15, p. 1257–1285, 2001.

[12] AHARONOV, D.; DAM, W. V.; KEMPE J. *et al.* Adiabatic Quantum Computation is Equivalent to Standard Quantum Computation. **SIAM Journal of Computing**, v. 37, p. 166-194, 2007.